# THEOREME DE π CARRE


Fabre Bastien 6°b
TAVERNERO Thomas 6°B
BLAIN Thomas 6°3


## Un peu d'intuition...

| | | |
|---|---|---|
| $49 = 7^2 + 0^2$ | $49 = 7^2$ | $7 \equiv 3[4]$ |
| $121 = 11^2 + 0^2$ | $121 = 11^2$ | $11 \equiv 3[4]$ |
| $242 = 11^2 + 11^2$ | $242 = 2 \times 11^2$ | |
| $14 =$ / | $14 = 2 \times 7$ | |
| $22 =$ / | $22 = 2 \times 11$ | |
| $343 =$ / | $343 = 7^3$ | |

## Théorème

Un nombre $n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\vartheta(p_i)}$ est une somme de carrés ssi pour tout $p_i$ tel que $p_i \equiv 3[4]$, $\vartheta(p_i)$ est pair.

$\boxed{\Rightarrow}$

- $n = a^2 + b^2$
  $= \prod p_i^{\vartheta(p_i)}$ avec $p_i \in p \equiv 3[4]$

$\Rightarrow$ $(-1)$ n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_p$

$\Rightarrow$ $p$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$

$p \mid n = a^2 + b^2$
$= (a+ib)(a-ib)$

Donc $p \mid a+ib$

$\Rightarrow$ $p \mid a$ et $p \mid b$

Donc $\exists (a'; b') \in \mathbb{Z}^2$ tq $n = p^2 (a'^2 + b'^2)$

$\frac{n}{p^2} = a'^2 + b'^2$, la puissance devant ce $p$, c'est la puissance de départ $-2$

On finit par récurrence

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\vartheta(p_i)}$

$= \underbrace{\prod_{p_i \not\equiv 3[4]} p_i^{\vartheta(p_i)}}_{\in \Sigma,}$ car $\Sigma$ stable par produits $\cdot \underbrace{\prod_{p_i \equiv 3[4]} p_i^{2k_i}}_{\in \Sigma} \times \underbrace{2^{\vartheta(2)}}_{\in \Sigma,}$ car 2 est un carré.

## Entiers de Gauss

- $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \}$
- $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre euclidien
- $\vartheta(a+ib) = a^2 + b^2$, avec $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$
- $(-1)$ n'est pas un carré ssi $p$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$
- $(-1)$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ssi $p \equiv 1[4]$

- $\Sigma = \{ n$ tq $n = a^2 + b^2 \}$
  - $n \in \Sigma \Leftrightarrow n = \vartheta(z)$, pour $z \in \mathbb{Z}[i]$
  - $\Sigma$ est stable par multiplication
    $n \in \Sigma$, $n' \in \Sigma$
    $n = \vartheta(z)$ $n' = \vartheta(z')$
    $nn' = \vartheta(z)\vartheta(z') = \vartheta(zz')$

- Si $p$ est premier, $p = a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$ $\Leftrightarrow$ $p$ est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
  $\Leftrightarrow$ $(-1)$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$
  $\Leftrightarrow$ $p \equiv 1[4]$

## Relation avec π

F(n) est le nombre de manière de décomposer un nombre en carré :

- on compte les permutations
- on compte les nombres de signes opposés.

On pose $\text{Moyenne} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} F(i)$

et $\lim_{+\infty} \text{Moyenne} = \pi$.

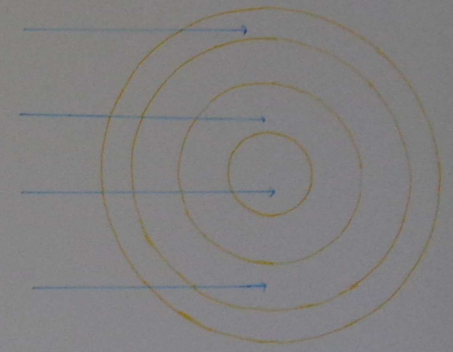
## Théorie des Anneaux

- Idéal : Soit A un anneau, I un groupe abélien
  I est un idéal ssi $I \subset A$
  $\forall i \in I$, $\forall a \in A$, $a \times i \in I$

- Éléments premiers d'un anneau :
  p est premier ssi p est non nul, non inversible
  et si $p \mid bc$, alors $p \mid b$ ou $p \mid c$

- Éléments irréductibles :
  p est irréductible si p est non inversible
  et si il ne s'écrit pas comme produit de 2 éléments non inversibles

  - Anneau
  - Principal : Tout idéal est engendré par 1 élément
  - Euclidien : il existe une division euclidienne
  - Factoriel : tout élément peut se décomposer en produit de facteurs premiers



- Résultats d'arithmétique :
  - $A/I$ est un corps ssi I est premier
  - $A/pA$ est intègre ssi p est irréductible

## Carrés dans un corps fini

- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes de congruence modulo p. C'est un corps ssi p est premier.
- x est un carré dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ssi $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.

# QUELLE UNION FAIT LA FORCE ?

Seuls ils perdent*, ensemble ils gagnent** !

Merci UJM

Made in Terre-Noire®

## JEU A

Énoncé :

On joue à pile ou face en lançant une pièce.

Tomber sur pile rapporte +1

Tomber sur face rapporte −1

La pièce n'est pas équilibrée

$\mathbb{P}(\text{pile}) = p = \frac{1}{2} - \varepsilon$

avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

X gain d'une expérience

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2} - \varepsilon$

$\mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2} + \varepsilon$

$\mathbb{E}(X) = -2\varepsilon$

$V(X) = 1 - 4\varepsilon^2$

espérance négative

$\varepsilon = 1/100$

$E(X) = -2/100$

25 % Hommes

75 % Femmes

## JEU B

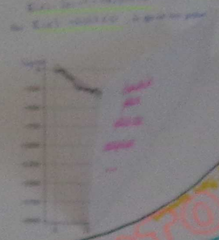
Énoncé :

On joue avec deux pièces.

$P_1(\text{pile}) = p_1 = \frac{1}{10} - \varepsilon$ $\quad P_2(\text{pile}) = \frac{3}{4} - \varepsilon$

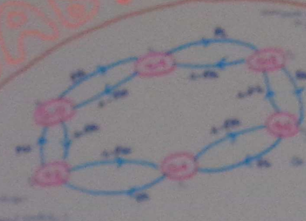
Lorsque le capital est multiple de 3, on joue la pièce 1.

Sinon, on joue avec la pièce 2.



Merci Mr Marchal !

## ABAB...



L'Alternance ABAB est

PERDANTE

## ABBABB...

L'Alternance ABBABB est

GAGNANTE !!!

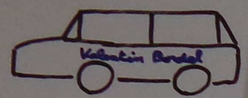
## ALÉATOIRE...

PERDANTS

On obtient finalement un jeu

GAGNANT !

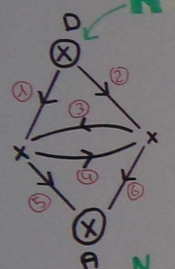
# TRAFIC ROUTIER
# LE COUT DE L'ANARCHIE !



## Présentation du problème général

On va schématiser la situation suivante,

- N voitures veulent aller d'un point D à un point A.
- il y a plusieurs itinéraires.
- les routes peuvent se croiser en 2 points.



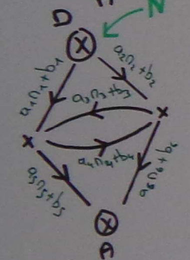

On va raisonner sur le flux présent sur chaque route, numérotées de 1 à 6.

. On pourra ensuite rajouter des contraintes.

. On va modéliser le coût sur chaque par :

$\forall i \in [\![1,6]\!]$, $C_i = a_i n_i + b_i$ (rapport coût/flux ; flux ; coût fixe)

Le schéma devient alors :

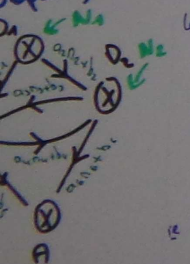



. On peut exprimer les contraintes avec la loi des mailles.

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = N \\ n_4 + n_5 = n_1 + n_3 \\ n_3 + n_6 = n_2 + n_4 \end{cases}$$

. Il y a une dernière contrainte, mais elle est redondante ; $n_5 + n_6 = N$

On peut rajouter un second point de départ, on aurait alors :




Les contraintes deviennent :

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 2000 \\ n_5 + n_4 = n_1 + n_3 \\ n_3 + n_6 = n_4 + n_2 + 2000 \end{cases}$$

ie

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 2000 \\ n_4 + n_5 - n_1 - n_3 = 0 \\ n_3 + n_6 - n_4 - n_2 = 2000 \end{cases}$$

## Résolution Matricielle

. Définissons des matrices représentatives de la situation :

- On énumère tous les "chemins" :

1. ① -> ⑤
2. ② -> ⑥
3. ① -> ④ -> ⑥
4. ② -> ③ -> ⑤
5. ⑥
6. ③ -> ⑤

On peut déf $U_i$ qui représente le chemin, on aurait :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où la matrice compilant tous les chemins est ;

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \end{pmatrix}$$

- On déf A la matrice des rapports coût/flux :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_6 \end{pmatrix}$$

- On déf B la matrice des coûts fixes :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_6 \end{pmatrix}$$

- X la matrice des flux par route :

$$X = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{pmatrix}$$

- R la matrice des flux par "chemin" :

$$R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_6 \end{pmatrix}$$

Rq : . $C(X) = U^T(AX + B)$

. $UR = X$

Donc $C(X) = U^T(AUR + B)$

### Cas anarchique : l'égoïsme. $\{T_{moy} = 63\}$

- Dans le cas égoïste, tous les chemins partant d'un même point ont le même coût.

On peut donc définir, $F = \begin{array}{c} \text{1 2 3 4 5 6} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ (partant de $D_1$) (partant de $D_2$)

- On a, $\begin{cases} C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \lambda_1 \\ C_5 = C_6 = \lambda_2. \end{cases}$, et $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

On a, $FR = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = N$

On a, $C(X) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = F^T\Lambda.$

D'où $U^TAUR + U^TB = F^T\Lambda \iff U^TAUR - F^T\Lambda = -U^TB.$

- Il y a des chemins qui seront non-empruntés, on va définir une matrice qui contraint ces chemins, on la nomme H.

On peut les deux équations sous la forme d'une matrice bloc :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U^TAU & F^T & H^T \\ F & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} R \\ -\Lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U^TB \\ N \\ 0 \end{bmatrix}$$

, les inconnues sont donc R et Λ. et G est inversible lorsque toutes les contraintes sont imposées.

- On contraint le système avec H tq $R_i \geq 0$.
- on contraint si le i-ème coefficient de R est nul :
- et si le i-ème coefficient de R est non nul tq $R_i$ et $R_j$ représentent deux chemin reliant la même arrivée et le même départ : $\{[U^TAUR]_i \geq [U^TAUR]_j$ ie le temp de parcours sur j est plus faible que sur i.

### Cas optimisé

$\{T_{moyen} = 62,3\}$

- On cherche R tel que :
  - → $\overbrace{R^TU^TAUR + R^TU^TB}^{K}$ soit le plus petit possible.
  - → $\forall i \in [\![1,6]\!]$, $R_i \geq 0$.
  - → $FR = N$

Pour cela, on choisit H tel que

$$\begin{bmatrix} U^T \overset{(A^T+A)}{2A} U & F^T & H^T \\ F & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ -\Lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U^TB \\ N \\ 0 \end{bmatrix}$$

, et tel qu'il n'y est qu'une seule solution.

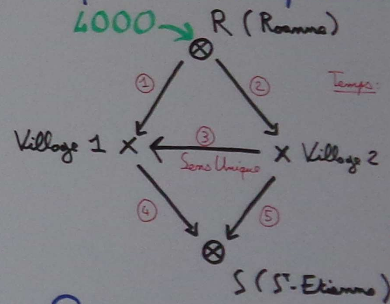
- On choisit H tel que K soit minimum.

On peut prolonger le raisonnement pour n chemin au lieu de 6.

## Présentation d'une application

4000 voitures souhaitant aller de Roanne à St-Etienne.

- Il y a 5 routes.
- Les voitures veulent mettre le moins de temps possible.
- Le problème est représenté ici :




Temps : ① 55 m… ② 10 + … ③ 1 m… ④ 10 + … ⑤ 55 …

Ici $m_i$ représente … de voitures … tronçon de …

- Résolution :

Trajets possibles :

. A : $R V_2 S \to T_A = 65 + \frac{m_2}{100}$ → On note α le nombre …

. B : $R V_1 S \to T_B = 65 + \frac{m_4}{100}$ → On note β le nombre …

. C : $R V_2 V_1 S \to T_C = 21 + \frac{m_2 + m_4}{100}$ → On note γ le nombre …

Donc $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 4000 \\ m_2 = \alpha + \gamma \\ m_4 = \beta + \gamma \end{cases}$

Cas n°1 : Les automobilistes sont égoïstes

. Ils veulent tous le même temps de parcours minimal.

. Pour résoudre : on étudie chaque combinaison de trajets (A,B,C), on …

On en déduit que seul le trajet C est utilisé … plus de temps … On obtient un temps moyen de [illegible] minutes …

Cas n°2 : On optimise le temps moyen.

On rappelle : $\overline{T} = \frac{1}{4000}(\alpha T_A + \beta T_B + \gamma T_C)$

. Résolution par la méthode d'optimisation quadratique :

$$\left.\begin{matrix} \alpha = 1800 \\ \beta = 1800 \\ \gamma = 400 \end{matrix}\right\} \overline{T} = \text{[illegible] minutes}$$

# SÉRIES DIVERGENTES … OU PAS !

**INTRO :**

$A = 1-1+1-1+1-\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$

$B = 1-2+3-4+5-\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n = \frac{1}{4}$

$C = 1+2+3+4+5+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} n = -\frac{1}{12}$

Vous penseriez savoir les calculer ? Sachez que les démonstrations du type : $A = 1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1+1-\ldots) = 1-A$ donc $A = 1/2$, ne sont ni justes, ni satisfaisantes.

…tion

## 1) Définition

Pour calculer A, B et C, on doit définir de nouvelles façons de sommer. Soit, une application $m : C \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto m(x)$ où $C$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, vérifiant les propriétés suivantes : linéarité, stabilité, régularité. En voici quelques unes.

## 2) Sommation au sens de Cesaro

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, on étudie la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on pose $y_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$

Si $\lim_{n\to+\infty} y_n$ existe, on pose $\sum_{n=0}^{+\infty}{}^{C} a_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$, c'est la somme au sens de Cesaro.

Calcul de A : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ et $y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_k}{n+1}$

$$y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Au sens de Cesaro, $A = \frac{1}{2}$

Limites : Cette méthode ne fonctionne pas pour B et C.

## 3) Sommation au sens d'Abel

On pose $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans $\mathbb{C}$ (même notation)

Si $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe, on pose $\sum_{n=0}^{+\infty}{}^{A} a_n = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, c'est la sommation au sens d'Abel.

Calcul de B : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^{n+1} n$ et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^n$

On obtient $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{4}$

Au sens d'Abel, $B = \frac{1}{4}$

Rq : Fonctionne aussi pour A mais pas pour C

# II / Fonction $\zeta$ de Riemann

## 1) Définition

On définit la fonction zêta de Riemann par : $\zeta : \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Notez qu'il y a une singularité en 1, et que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour calculer C, il nous importe de prolonger zêta en $-1$.

## 2) Prolongement analytique

La fonction zêta est analytique/holomorphe dans un demi-plan ouvert.

Th : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g$ analytique du U dans $\mathbb{C}$.

Si $\begin{cases} a \in U \\ V \text{ un voisinage de } a \end{cases}$ tq $\forall x \in V$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$ sur U.

Il suffit de trouver une fonction $\Psi$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et coïncidant avec $\zeta$ sur le demi-plan ouvert.

1ère approche : On approche la série par son intégrale : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \rightsquigarrow \int_0^{\infty} \frac{a_x}{x^s} dx$

Si $\sum a_n$ a un sens, on pose : $\sum_{n=1}^{+\infty}{}^{\zeta} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$

Cette approximation nous donne un ordre d'idée sur le prolongement analytique à faire.

Formule d'Euler-Maclaurin : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \frac{1}{n^s}$

$$\forall (a, N) \in \mathbb{N}^2, \sum_{n=a+1}^{+\infty} f(n) = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \sum_{k=0}^{N} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a) + \frac{(-1)^N}{(N+1)!} \int_a^{+\infty} B_{N+1}(x) f^{(N+1)}(x) dx$$

où $B_k$ est la fonction de Bernoulli en 0

Notamment : $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1$

En utilisant cette formule, on prolonge analytiquement $\zeta$ dans le plan $\{Re(s) > -N \setminus \{1\}\}$

On obtient : $\forall N \in \mathbb{N}$, $A_N = s(s+1)\ldots(s+N-1)$

et $\Psi_N(s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (-1)^k A_k(s) - \frac{A_{N+1}(s)}{(N+1)!} \int_1^{\infty} B_{N+1}(x) x^{-s-N-1} dx$

Le prolongement de $\zeta$ sur ce plan, s'obtient avec $\zeta(s) = 1 + \Psi_N(s)$

Application : $\zeta(-1) = 1 + \Psi_2(-1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$

# III / Application à la physique

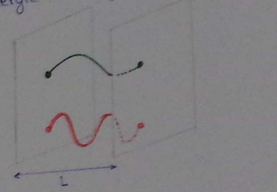
## 1) Effet Casimir

Cet effet a été prédit par Hendrik Casimir en 1948, correspondant à une force attractive entre 2 plaques parallèles conductrices non-chargée.

Cause : Les fluctuations quantiques du vide sont responsables de l'apparition désordonnée de photons de diverses longueurs d'onde, créant une énergie proportionnelle à la somme des fréquences.

Entre 2 plaques éloignés d'une distance L, l'énergie est proportionnelle à $\frac{1}{L}(1+2+3+\ldots)$.

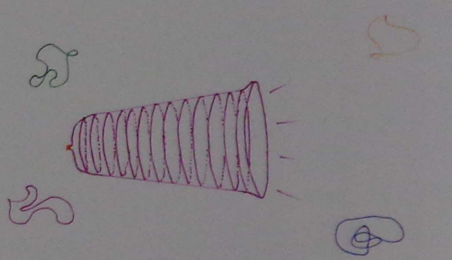
Cette énergie est négative, d'où force attractive.




## 2) Théorie des cordes.

Cette somme se retrouve dans des modèles branaires de l'Univers.

Elle pourrait expliquer l'origine de l'inflation cosmique ou de l'apparition de la gravitation




CRÉDIT : SOUVETON Maé
BONNARDEL Matthieu
SALET Augustin
BERAUD Jordan

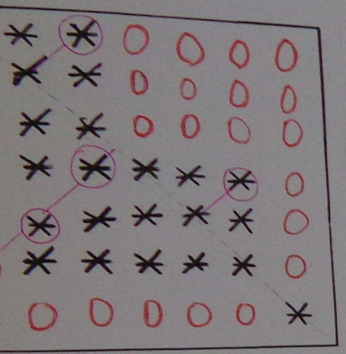

ANNÉE : 2017-2018


Remerciement particulier à tous nos ...

# MÉANDRES DANS LES MATRICES

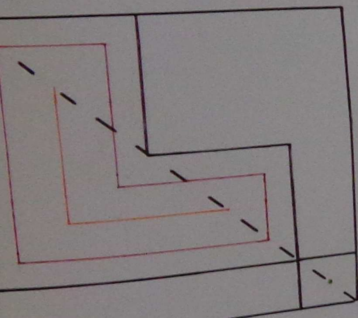
## Présentation des règles

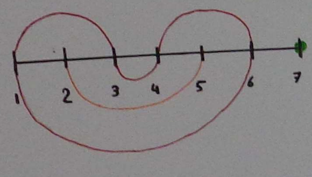
…ple avec une matrice 7x7 :



Nous nous intéressons aux matrices de la forme ci-contre.

Nous traçons des lignes horizontales et verticales (cf fig 2) liant les coefficients les plus éloignés de la diagonale (0) à la diagonale



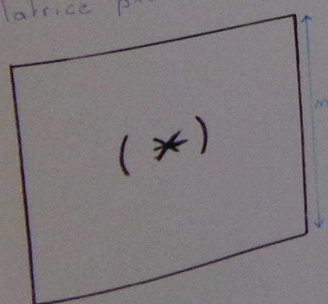



$r = 2 + 1 + 1 = 4$

Un lacet (boucle) compte pour 2
Un chemin (ligne), ou point vaut 1

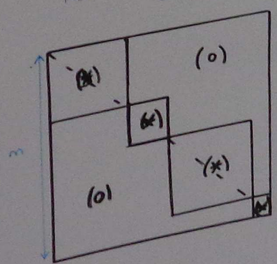
## Cas simples

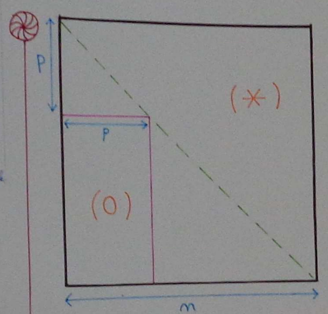
Matrice pleine




$r = m$

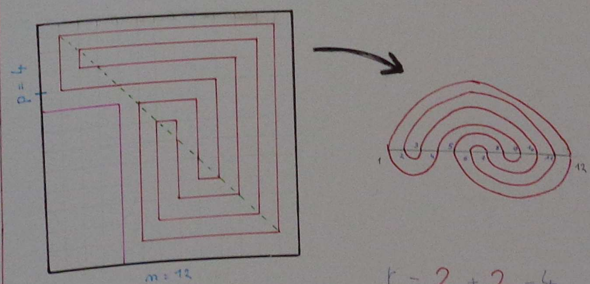
Matrice diagonale par bloc




On s'intéresse au cas ci-contre, on nomme ces matrices $(m, p)$.

## Exemple avec (12,4)



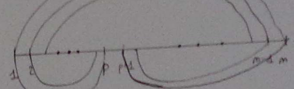

$r = 2 + 2 = 4$

| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 6 | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Montrons que $r = PGCD(m, p)$

## Démo

On modélise le problème par son méandre




On considère un lacet donné, on regarde les nombres qui se suivent dans le lacet

le nombre qui suit $k$ est :

- en passant par le haut : $k' = m - k + 1 \equiv 1 - k\ [m]$
- en passant par le bas :
  - Si $k \leq p$ : $k' = p - k + 1 \equiv p - k + 1\ [m]$
  - Si $k > p$ : $k' = m - k + p + 1 \equiv p - k + 1\ [m]$

  $\Big\}\ k' \equiv p - k + 1\ [m]$

- Dans le cas d'un lacet, on passe par tous les nombres avant de revenir au début.
- Dans le cas d'un chemin, regardons un exemple :

(5, 2)


$1 \xrightarrow{2-1+1} 2 \xrightarrow{1-2=-1\equiv 4[5]} 4 \xrightarrow{2-4+1=-1} 4 \xrightarrow{1-4=-3\equiv 2[5]} 2 \longrightarrow 1 \ldots$

On passe par tous les points en faisant des demi-tours.

Si on prend un lacet commençant par $l \in [\![1;m]\!]$ :

$l \longrightarrow p-l+1 \longrightarrow l-p \longrightarrow 2p-l+1 \longrightarrow l-2p \longrightarrow 3p-l+1 \longrightarrow l-3p \longrightarrow \ldots$

Un nombre $a \in [\![1;m]\!]$ s'il s'écrit

$a = l - kp + k'm$

ou

$a = 1 - l + kp + k'm$

En posant $\delta = PGCD(m, p)$

$a \equiv l\ [\delta]$

ou

$a \equiv 1 - l\ [\delta]$

$\longrightarrow$ Soit c'est un lacet passant par $l$, il vaut pour deux si $l \not\equiv 1-l\ [\delta]$

Soit c'est un chemin passant par $l$, il vaut pour un si $l \equiv 1-l\ [\delta]$

d'où $r = \delta = PGCD(m, p)$.

BOUCHOU Djessim
LAURENT Mathieu
DIBASSO Joël
DUMONT Valentin

# Un plan projectif de poche

## Jeu du Dobble

### …u jeu :

…les
… / carte
…t de trouver le symbole commun entre 2 cartes

### … base :

…actement $n$ symboles / carte 2 à 2 ≠
…tes ≠ ont un seul et unique symbole
… ⟹ 2 symboles ≠ appartiennent à au plus une carte
…ymbole n'est dans toutes les cartes (jeu trivial sinon)
… aucun symbole présent sur toutes les cartes

### …uences

…mbole figure au plus $n$ fois
…mbre de cartes $\leq n^2 - n + 1$
…ombre de symboles 2 à 2 ≠ $\geq n^2 - n + 1$

Un jeu optimal est constitué de
…$+1$ cartes et symboles différents

### Démo csq 1 :

Soit $S$ un symbole.
Notons · $C_1, \dots, C_j$ les cartes contenant $S$
· $T_1, \dots, T_j$ les ensembles $C_i$ privés de $S$
· $T_i \cap T_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

$\exists\, C_0$ une carte tq $S \notin C_0$

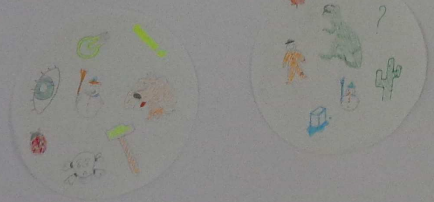
$\forall i \in [\![1, \mathrm{card}(C_0)]\!], \exists\, \alpha_i \in T_i \cap C_0$

Or $C_0$ possède $n$ éléments

Donc $d \leq n$

On en déduit qu'un symbole figure au plus $n$ fois.

Cartes manquantes dobble



## Interprétation géométrique

On associe chaque symbole à un point et chaque carte à une droite. On peut alors reformuler nos règles

1) Chaque droite contient exactement $n$ points ≠
2) Deux droites ≠ contiennent exactement un point en commun ⟹ par 2 points distincts passe une unique droite
3) Aucun point n'est contenu dans toutes les droites

La règle 2 implique de se placer dans un plan projectif fini

Def : On prend le plan standard, et on ajoute autour un genre de droite à l'infini
Toutes les droites parallèles entre elles se coupent en un point de cette droite.

La règle 2 est alors respectée dans ce plan projectif

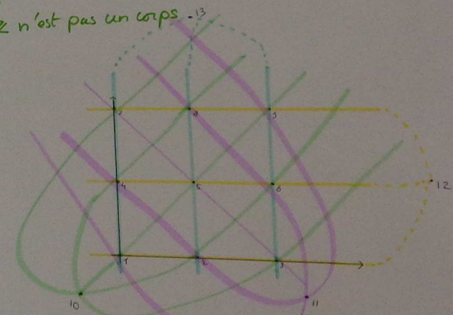
Le problème est de trouver un corps $\mathbb{K}$ fini à $n-1$ éléments et vérifiant que le nombre de droites soit égal au nombre de cartes (cas optimal)

On choisit le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p = n-1$

$p$ doit alors être premier, sinon $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est pas un corps

Cas $m = 4$ :

| Droites : | Points : |
|---|---|
| $y = 0$ | (0,0), (1,0), (2,0) |
| $y = 1$ | (0,1), (1,1), (2,1) |
| $y = 2$ | (0,2), (1,2), (2,2) |
| $x = 0$ | (0,0), (0,1), (0,2) |
| $x = 1$ | (1,0), (1,1), (1,2) |
| $x = 2$ | (2,0), (2,1), (2,2) |
| $y = x$ | (0,0), (1,1), (2,2) |
| $y = x+1$ | (0,1), (1,2), (2,0) |
| $y = x+2$ | (0,2), (1,0), (2,1) |
| $y = 2x+1$ | (0,2), (1,0), (2,2) |
| $y = 2x+2$ | (0,2), (1,2), (2,0) |
| $y = 2x$ | (0,0), (2,2), (2,1) |



$C_1$ : 1, 2, 3, 12
$C_2$ : 4, 5, 6, 12
$C_3$ : 7, 8, 9, 12
$C_4$ : 1, 4, 7, 13
$C_5$ : 2, 5, 8, 13
$C_6$ : 3, 6, 9, 13
$C_7$ : 1, 5, 9, 10
$C_8$ : 7, 2, 6, 10
$C_9$ : 3, 4, 8, 10
$C_{10}$ : 2, 4, 9, 11
$C_{11}$ : 1, 6, 8, 11
$C_{12}$ : 3, 5, 7, 11
$C_{13}$ : 10, 11, 12, 13

### …tion du jeu

… un jeu $n = 6$ ⟶ Équations et points des droites ⟶ Création d'un tableau ⟶ Création des cartes ⟶ Création des symboles ⟶ Amusez-vous !!

# L'ÉPOPÉE D'UN CD...

## Recherche de codes correcteurs :

$$\underset{\text{info de base}}{X} \longrightarrow \underset{\text{modifié}}{MX} \xrightarrow{\text{0/1 erreur}} \underset{\text{altéré}}{Y}$$

$X \in M_{n,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$M \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$Y \in M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

### 1ère idée : M triple chaque termes :

$(1\,0\,1) \rightarrow (111\;000\;111)$

Si altération, l'erreur est vue directement.

### Code 4 bits :

Minimiser la taille de M sachant que $m > n$ :

$m=5$ : $2^4 \times 6 = 96 > 2^5 \rightarrow$ pas injectif

$m=6$ : $2^4 \times 7 = 112 > 2^6 \rightarrow$ pas injectif

$m=7$ : $2^4 \times 8 = 128 = 2^7 \rightarrow$ injectif

Conclusion : $m \min = 2n - 1$

On essaie de s'en rapprocher.

### 2ème idée : 2n termes :

0 : entre deux nombres similaires

1 : entre deux nombres différents

ex : $(1\,0\,0\,1) \rightarrow (1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0)$

$\forall i \in [\![0, n]\!]$, avec n la taille du code de base.

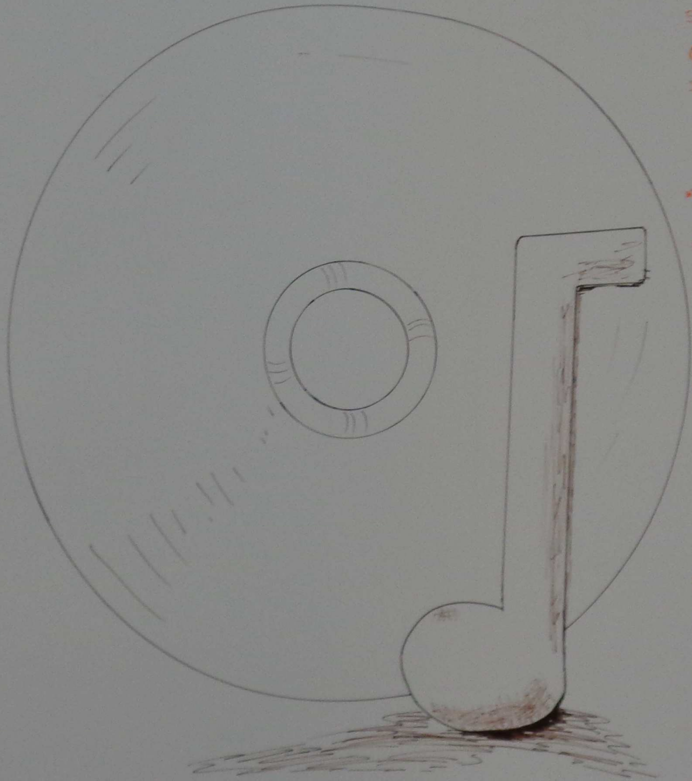
Les $a_{2i+1}$ sont les indicateurs.

Si $(a_{2i} + a_{2i+2})[2] \neq a_{2i+1}$, il y a une erreur.

* Si $a_{2i+2} + a_{2i+4} \neq a_{2i+3}$ alors l'erreur est sur $a_{2i+2}$
  $\Rightarrow$ intersection de $(a_{2i}, a_{2i+1}, a_{2i+2})$ et $(a_{2i+2}, a_{2i+3}, a_{2i+4})$
* Sinon l'erreur est sur $a_{2i+1}$

Si on veut corriger 4 erreurs bien réparties sur un code à 16 éléments, il est possible de diviser ce code par 4 et corriger chaque division séparément.

En cas d'imperfection ou de rayures, l'information d'un CD est altérée. Cependant, si l'erreur n'est pas trop importante, il peut encore être lu grâce à un code correcteur.



## Choisissez un chiffre entre 0 & 15 puis répondez à ces questions, vous pouvez mentir une fois...

Faux :

Vrais : 1

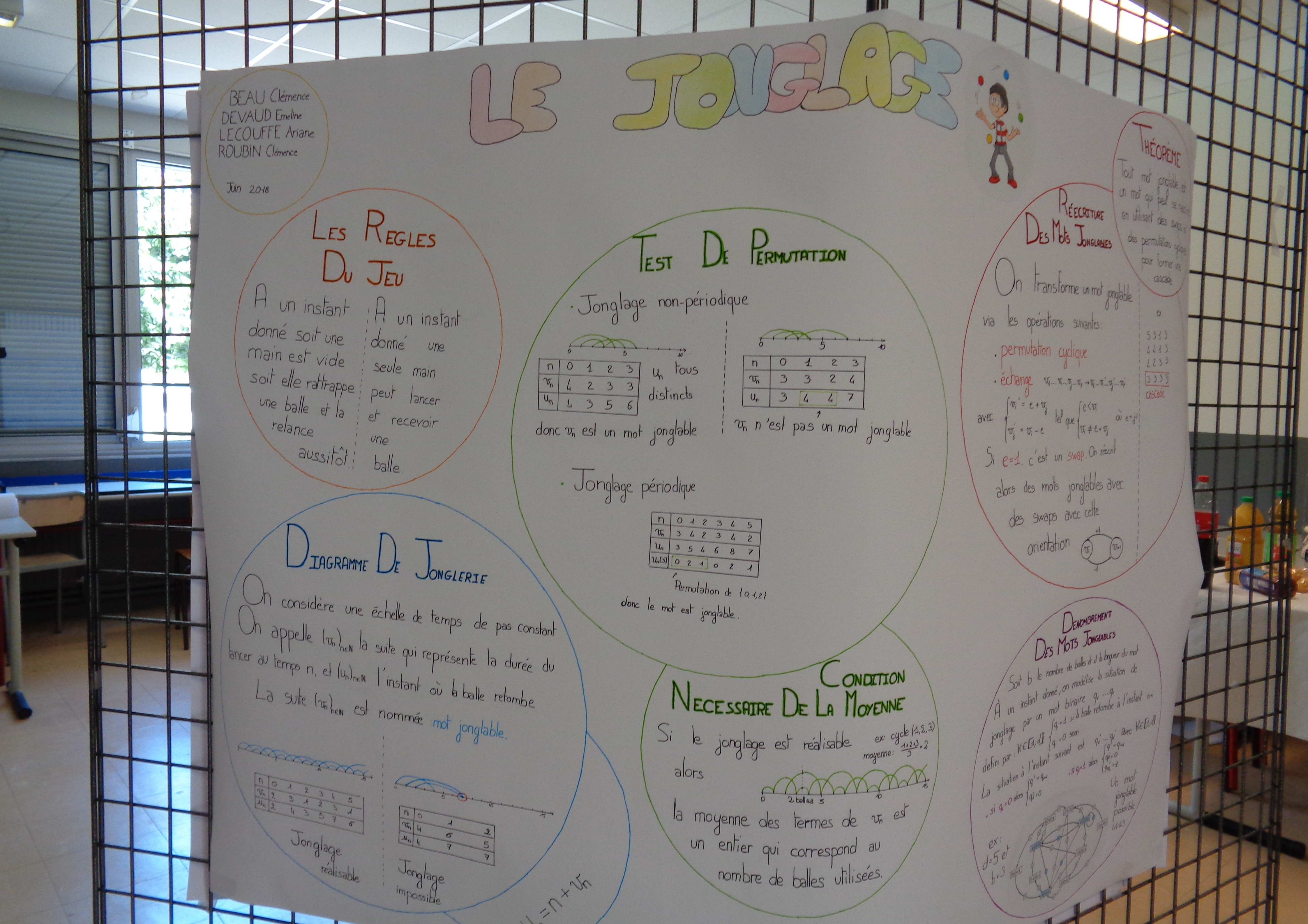
1. Est-il $\geq 8$ ?
2. Est-il dans $\{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$ ?
3. Est-il dans $\{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$ ?
4. Est-il impair ?
5. Est-il dans $\{1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 15\}$ ?
6. Est-il dans $\{1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 15\}$ ?
7. Est-il dans $\{1, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 15\}$ ?

* On obtient une liste de 7 chiffres binaires : $x_1, \ldots, x_7$
* On note $\begin{cases} a = x_1 + x_3 + x_5 + x_7 & [2] \\ b = x_2 + x_3 + x_6 + x_7 & [2] \\ c = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & [2] \end{cases}$

* Si il n'y a pas de mensonge on aura $a = b = c = 0$
* Sinon il y a un mensonge qui se trouve à la cba$^{\text{ème}}$ position en binaire. Il faut donc la corriger.

* Convertir en base 10 les 4 premiers chiffres :

Vous avez trouvé la solution !


LE JONGLAGE
BEAU Clémence
DEVAUD Emeline
LECOUFFE Ariane
ROUBIN Clémence
Juin 2018
Les Regles Du Jeu
A un instant donné soit une main est vide soit elle rattrappe une balle et la relance aussitôt.
A un instant donné une seule main peut lancer et recevoir une balle.
Test De Permutation
· Jonglage non-périodique
n 0 1 2 3
vn 4 2 3 3
un 4 3 5 6
un tous distincts
donc vn est un mot jonglable
n 0 1 2 3
vn 3 3 2 4
un 3 4 4 7
vn n'est pas un mot jonglable
· Jonglage périodique
n 0 1 2 3 4 5
vn 3 4 2 3 4 2
un 3 5 4 6 8 7
un[3] 0 2 1 0 2 1
Permutation de {0,1,2}
donc le mot est jonglable.
Théorème
Tout mot jonglable est un mot qui peut se réécrire en utilisant des swaps et des permutations cycliques pour former une cascade
Réécriture Des Mots Jonglables
On transforme un mot jonglable via les opérations suivantes:
. permutation cyclique
. échange
avec
tel que
où e = j-i
Si e=1, c'est un swap. On réécrit alors des mots jonglables avec des swaps avec cette orientation
+1
-1
5313
4413
4233
3333
cascade
Diagramme De Jonglerie
On considère une échelle de temps de pas constant
On appelle (vn)n∈N la suite qui représente la durée du lancer au temps n, et (un)n∈N l'instant où la balle retombe
La suite (vn)n∈N est nommée mot jonglable.
n 0 1 2 3 4 5
vn 2 3 1 2 3 1
un 2 4 3 5 7 6
Jonglage réalisable
n 0 1 2
vn 4 6 2
un 4 7 5 7
Jonglage impossible
un = n + vn
Condition Necessaire De La Moyenne
Si le jonglage est réalisable alors la moyenne des termes de vn est un entier qui correspond au nombre de balles utilisées.
ex: cycle (1,2,3)
moyenne: (1+2+3)/3 = 2
2 balles
Denombrement Des Mots Jonglables
Soit b le nombre de balles et d la longueur du mot
À un instant donné, on modélise la situation de jonglage par un mot binaire q1 ... qd
défini par: ∀i ∈ [1;d]
qi = 1 si la balle retombe à l'instant n+i
qi = 0 sinon
La situation à l'instant suivant est q'1 ... q'd avec ∀i ∈ [1;d]
. si q1 = 0 alors
. si q1 = 1 alors
ex: d=5 et b=3
Un mot jonglable possible 4413

# AFFECTATIONS MÉRITOIRES

Perrine Champétinaud
Camille Graff
Cyril Carichiol
Marwan El Cheikh
Juin 2018

Nous souhaitons affecter des étudiants dans des universités de façon méritoire. Pour cela, on dispose : d'un classement des universités par chacun des étudiants et d'un classement des étudiants par chaque université.
L'affectation est méritoire s'il n'y a pas un étudiant b et une université A tels que le candidat a affecté dans l'université A soit moins bien classé par l'université A que l'étudiant b et que l'université B dans laquelle est affecté le candidat b soit moins bien classée par l'étudiant b que l'université A.

Exemple 1 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 |
| B | 2 | 1 | 3 |
| C | 1 | 3 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C |
| 2 | A | C | B |
| 3 | C | B | A |

Affectation proposée :

A 1
B 2
C 3

Il faut créer un programme permettant de vérifier qu'il n'y ait pas de couples instables ie non méritoires. Pour l'université de chaque couple, on regarde si les étudiants mieux classés que l'étudiant affecté souhaitaient cette université plus que celle obtenue.

Exemple 2 :

| | | |
|---|---|---|
| A | 2 | 1 |
| B | 1 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | A | B |
| 2 | B | A |

Affectation proposée :

$\begin{cases} A\ 1 \\ B\ 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A\ 2 \\ B\ 1 \end{cases}$

→ il n'y a pas unicité affectation

liste des m étudiants : $E = (E_1, \dots, E_m)$ ; liste des N universités : $U = (U_1, \dots, U_N)$ (N fixé)

classement des universités par chaque élève : $\mathcal{C}P_E$

classement des élèves par chaque université : $\mathcal{C}P_U$ (sans doublon)

L'affectation donne des couples université / étudiant respectant le critère d'affectation.

ensemble des couples : $\Sigma = \{(U_1, E_1), \dots, (U_m, E_m)\}$

L'affectation est méritoire ssi $\forall (i,j) \in [\![1;m]\!]^2, \begin{cases} \mathcal{C}P_E(E_j, U_j) \le \mathcal{C}P_E(E_j, U_i) \\ \text{ou } \mathcal{C}P_U(U_i, E_i) \le \mathcal{C}P_U(U_i, E_j) \end{cases}$.

## Principe de l'algorithme de Gale-Shapley :

m étudiants sont placés dans m universités et on étudie l'affectation de l'étudiant $E_{m+1}$

### 1er cas

$E_{m+1}$ veut une université non occupée en premier voeu

→ on le place dans cette université

### 2ème cas

$E_{m+1}$ veut une université $U_j$ déjà occupée et il est mieux classé que $E_j$

→ on met $E_{m+1}$ dans $U_j$ et on réaffecte $E_j$ selon ses voeux suivants ainsi que les autres étudiants

### 3ème cas

$E_{m+1}$ veut une université $U_j$ déjà occupée mais il est moins bien classé que $E_j$

→ on regarde ses voeux suivants et on se ramène à un des deux cas précédents

La complexité de cet algorithme est en $\boxed{O(2^n)}$. Afin de coder la technique de $\boxed{\text{Gale-Shapley}}$, il faut modifier le cas où l'étudiant prend la place d'un autre dans l'université :

* L'étudiant est ajouté à la liste des non-affectés
* Cet ancien étudiant est retiré de la liste des affectés
* Le nouvel étudiant est affecté à l'université

Ainsi la complexité passe en $\boxed{O((U+E)^2)}$ où U est le nombre d'universités et E est le nombre d'étudiants

Exemple 3 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 |
| B | 2 | 1 | 3 |
| C | 1 | 3 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C |
| 2 | A | C | B |
| 3 | C | B | A |

→ On regarde le classement de l'élève 1
$1 \longrightarrow A$

→ On regarde le classement de l'élève 2
$2 \not\longrightarrow A$
$2 \longrightarrow C$

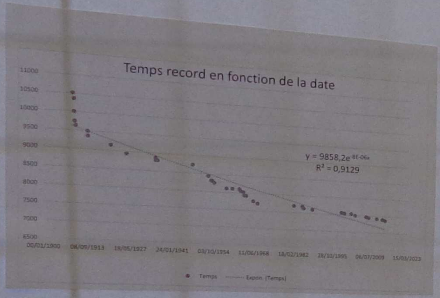
→ On regarde le classement de l'élève 3 et $2 \longrightarrow \emptyset$
$3 \longrightarrow C$

→ On regarde le classement de l'élève 2
$2 \not\longrightarrow A$
$2 \not\longrightarrow C$

# PACO, L'ULTIME RECORDMAN

## Des bases historiques

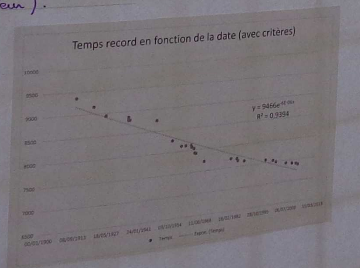
Notre étude est basée sur les records établis durant le siècle précédent.
Dans un premier temps, on représente en ordonnée le temps de parcours des mythiques 42,195 km et en abscisse la date à laquelle ces exploits ont été réalisés (à compter de la première compétition, le 24 juillet 1908).




Temps de la course : en secondes
date : en jours depuis le 24 juillet 1908.


## Sélection des valeurs cohérentes

→ Suppression des premières valeurs
→ Élimination des records d'un même athlète lorsqu'ils se suivent dans le temps (on conserve uniquement la dernière valeur).




## Forme de la solution

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = Ae^{-\lambda t} + C}$$

avec $(A, \lambda, C) \in \mathbb{R}^3$

Objectif : déterminer $C$, qui correspond au temps de course minimal.

## Technique de minimisation

On pose, $\forall i \in [\![1;27]\!]$, $\Delta_i = y_i - (Ae^{-\lambda t_i} + C)$

On pose :

$$\boxed{g(A, \lambda, C) = \sum_{i=1}^{27} \left(y_i - (Ae^{-\lambda t_i} + c)\right)^2}$$

## Dérivées partielles de g

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = -2A\sum_{i=1}^{27} y_i t_i e^{-\lambda t_i} + 2A^2\sum_{i=1}^{27} t_i e^{-2\lambda t_i} + 2AC\sum_{i=1}^{27} t_i e^{-\lambda t_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial A} = -2\sum_{i=1}^{27} y_i e^{-\lambda t_i} + 2A\sum_{i=1}^{27} e^{-2\lambda t_i} - 2c\sum_{i=1}^{27} e^{-\lambda t_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{27} y_i + 2A\sum_{i=1}^{27} e^{-\lambda t_i} + 2c \times 27$$

## Détermination des paramètres

On pose :

$$\overline{y_m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$T_m(\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda t_i}$$

$$T_m(2\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{-2\lambda t_i}$$

$$S_m(\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i e^{-\lambda t_i}$$

D'où

$$A = \frac{S_m(\lambda) - T_m(\lambda)\overline{y_m}}{T_m(2\lambda) - T_m(\lambda)^2}$$

$$C = \frac{T_m(\lambda)^2\overline{y_m} - S_m(\lambda)T_m(\lambda)}{T_m(2\lambda) - T_m(\lambda)^2}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{y_i - y_{i-1}} = \frac{e^{-\lambda t_{i+1}} - e^{-\lambda t_i}}{e^{-\lambda t_i} - e^{-\lambda t_{i-1}}}$$

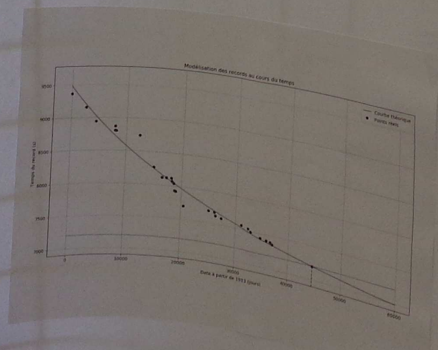
En utilisant la fonction fsolve de python et en faisant la moyenne des $\lambda$ on a :

$\lambda = 0{,}00004$ $A = 2736$ $C = 6741$

## Application concrète

Sur une échelle de temps infini, on pourrait courir le marathon en :

$$\boxed{1\text{ h } 52\text{ min } 21\text{ s}}$$



Et asymptotiquement :
La barre mythique des 2h serait franchie le 10 juillet 2035, durant le marathon de Mohawk Hudson River Marathon, USA (si le calendrier des marathons reste inchangé).