

## Sujets stage Hippocampe 22-25 juin 2026.

### 1 Problème du cercle de Gauss et ses extensions (Encadrant : D. Essouabri)

Le problème du cercle de Gauss est un problème de mathématiques dont l'énoncé est très simple, mais engendrant diverses questions non toutes résolues. Il consiste à considérer un cercle tracé sur un quadrillage et à demander combien de nœuds du quadrillage sont à l'intérieur du cercle. Bien que le problème initial demande le nombre de points entiers du réseau à l'intérieur d'un cercle, il n'y a aucune raison de ne pas envisager d'autres formes ; ainsi le problème des diviseurs de Dirichlet est le problème équivalent où le cercle est remplacé par l'hyperbole équilatère. De même, on pourrait prolonger la question de deux dimensions à des dimensions supérieures, et demander le nombre de points entiers à l'intérieur d'une sphère ou d'un quelconque autre objet géométrique. Les fonctions zêtas et les théorèmes taubériens permettent d'obtenir des réponses en moyenne à ces questions. L'objectif de ce sujet est d'explorer ce thème de recherche au confluent de la théorie des nombres, de l'analyse et de la géométrie complexe et algébrique.

### 2 Répartitions d'entiers avec des contraintes digitales et spectre de vibration des fractales discrètes (Encadrant : D. Essouabri)

L'objectif de ce stage est d'explorer les liens entre l'étude des répartitions d'entiers avec contraintes digitales et la géométrie d'une classe de fractales discrètes dont la fractalité se manifeste à l'infini. Nous verrons en particulier comment les propriétés spectrales de ces fractales permettent d'obtenir des informations assez précises sur les répartitions d'entiers avec contraintes digitales, mais aussi sur la compréhension de plusieurs autres problèmes arithmétiques.

### 3 La Pizza (Encadrant : Stéphane Gaussent)

On prend un point sur une pizza, pas sur le bord, on déplace en ce point l'arrangement des 4 droites à  $\pi/4$  qui passent par le centre. Cela découpe la pizza en huit parts. On donne alternativement une part à une personne et une part à une autre. À la fin, les deux personnes ont mangé la même surface de pizza, pourquoi ?

### 4 Le coup de ciseau (Encadrant : Stéphane Gaussent)

La question est : peut-on découper, après pliages, toute ligne polygonale fermée d'un seul coup de ciseau. On pourra commencer par des formes géométriques plus ou moins faciles comme les triangles, les rectangles, les pentagones concaves...

## 5 Reconnaissance de caractères par le deep learning (Encadrant : William Kengne)

On considère des caractères manuscrits et l'on souhaite construire un algorithme d'apprentissage profond (deep learning) permettant de reconnaître ces caractères et les classer dans les bonnes catégories. Ces images ont été discrétisées sous la forme d'une matrice  $q \times q$  (avec  $q \in \mathbb{N}^*$ ) pixels et après vectorisation, elles apparaissent sous la forme d'un tableau à  $q \times q + 1$  colonnes et  $n$  lignes, où  $n \in \mathbb{N}^*$  représente le nombre d'images.

Plus généralement, on considère un couple aléatoire  $(X, Y)$ , où  $X$  est le vecteur des variables explicatives et  $Y$  la variable à expliquer; ainsi que des observations  $D_n = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$  du couple  $(X, Y)$ . L'espace des observations est noté  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  où  $\mathcal{X}$  est l'espace des entrées et  $\mathcal{Y}$  celui des sorties. L'objectif du deep learning est de construire à partir de l'échantillon d'apprentissage  $D_n$ , un prédicteur  $\hat{h}_n$  par réseaux de neurones multicouches, susceptible de reproduire au mieux (selon un critère que l'on s'est fixé) la variable  $Y$  ayant observé  $X$ . On s'intéressera à la classification i.e.  $Y$  est qualitative ou  $\mathcal{Y}$  fini. Dans notre problème de reconnaissance de caractères, pour une image donnée,  $X$  représente la vectorisation issue de l'image discrétisée et  $Y$  est le vrai label de l'image.

Dans ce stage, on introduira la théorie de l'apprentissage profond et construira un algorithme avec Python pour un problème de reconnaissance de caractères. On pourra considérer l'exemple des données MNIST (<https://www.kaggle.com/competitions/digit-recognizer/overview>) ou des données Digit Dataset, disponibles dans la librairie scikit-learn de Python.

## 6 Bases, sommes de chiffres et répartition d'entiers (Encadrant : Timothée Rampal)

Amusons nous à écrire un nombre entier  $N$  dans une base quelconque (par exemple la base 10), il est alors possible de faire la somme des chiffres de  $N$  ce qui nous donne (surprise !) un autre nombre que l'on nomme  $s(N)$ . La question intéressante est de savoir alors si le nombre  $s(N)$  obtenu est "quelconque" ou non, par exemple est ce que l'on a plus de chances que  $s(N)$  soit d'une certaine forme plutôt qu'une autre ? Et si on change notre  $N$  de départ, comment  $s(N)$  se comporte ? Enfin, est ce que les nombres  $s(N)$  se répartissent bien parmi les entiers et/ou les classes de congruences lorsque  $N$  grandit ou est ce qu'ils préfèrent boudier certaines valeurs ? Ce type de sujet, encore très actif aujourd'hui, nous emmènera vers des techniques classiques mais très utiles dans la recherche en théorie des nombres.

## 7 La ruine du joueur (Encadrant : Julian Tugaut)

Dans un jeu de pile ou face équilibré (ou non), on se demande si le joueur va faire fortune ou va être ruiné. Quelle est la probabilité de sortir grandi du jeu? Et, au bout de combien de temps?

Techniques employées : suites récurrentes d'ordre 2 et bien sûr des probabilités de base. Extension possible : matrices stochastiques, chaînes de Markov...

## 8 Les aiguilles de Buffon (Encadrant : Julian Tugaut)

On lance une baguette (ou une aiguille) un très grand nombre de fois et l'on compte le nombre de fois où celle-ci intersecte une latte du plancher. En déduire une approximation de Pi.

Techniques employées : loi des grands nombres, intégrales doubles. Extension possible : théorème centrale de la limite, grandes déviations...