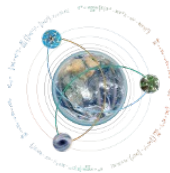
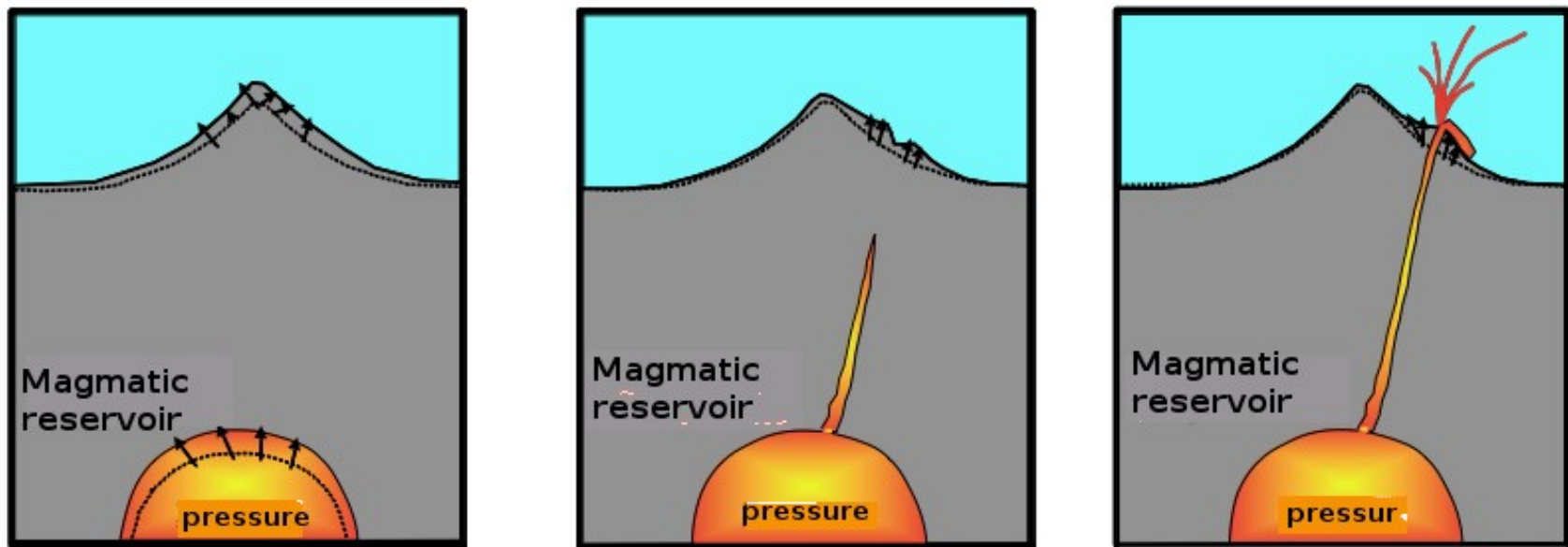


Tribulations d'un mathématicien sur les volcans

Olivier Bodart
Université Jean Monnet, Institut Camille Jordan
20-21 Novembre 2025



VOLCAN = MONTAGNE, PLUS...



- Eruptions de types (très) variés
- Roches/Sols : matériaux hétérogènes
- Impossible de voir « à travers » la montagne

➔ **Structure mécanique complexe**

➔ **Prédire et comprendre les éruptions ?**

Piton de la fournaise (La Réunion) - Cratère Formica Leo



Piton de la fournaise (La Réunion) - Cratère Dolomieu



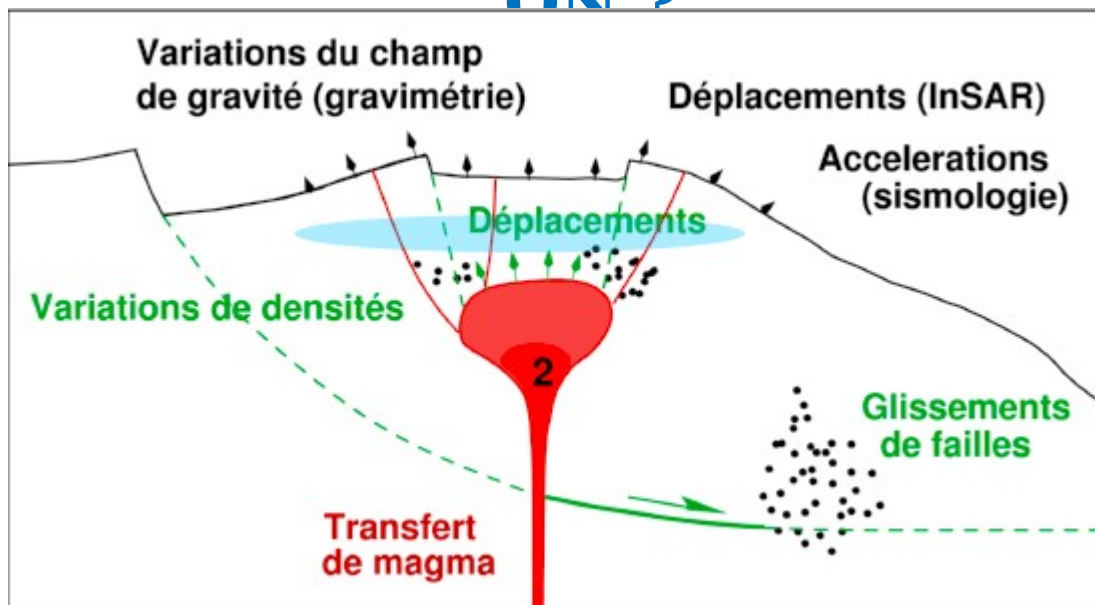
Etna (Sicile) - "Route" d'accès au sommet



Etna (Sicile) - Sommet et observatoire

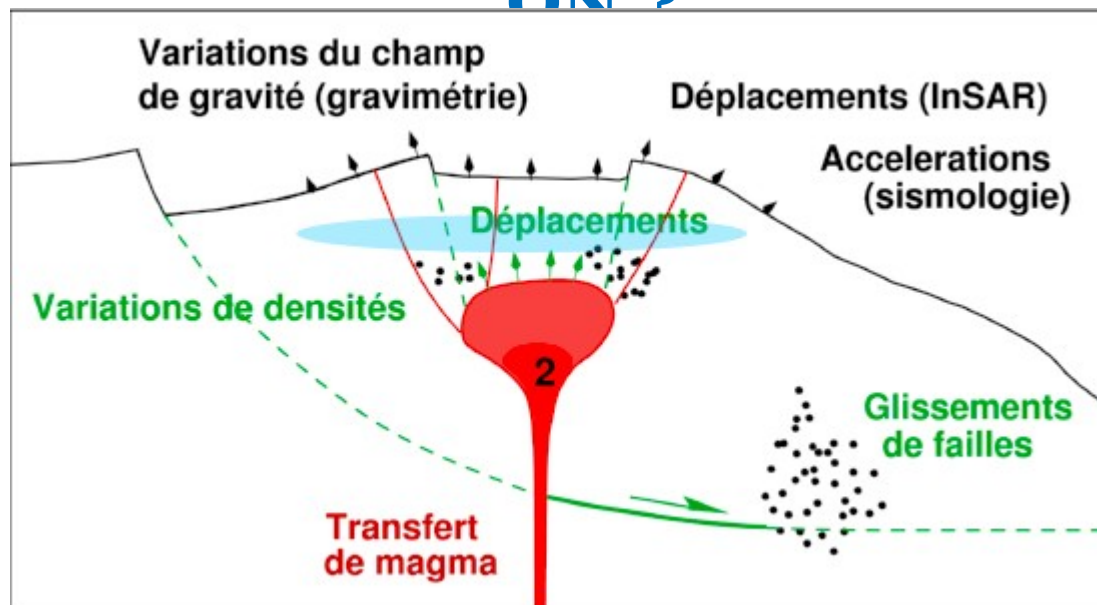


QUE SAIT- ON ?



- Mesurer la déformation du sol (*GPS et Satellites*)
- Mesurer des micro-variations de la gravité (*modifiée par l'intrusion de magma*)
- Déterminer le type de terrain (*en envoyant des ondes à travers le sol*)

QUE VEUT- ON ?



- Connaissant la position du magma, déterminer la déformation du sol
- En déduire le risque d'éruption

**Plus
difficile**

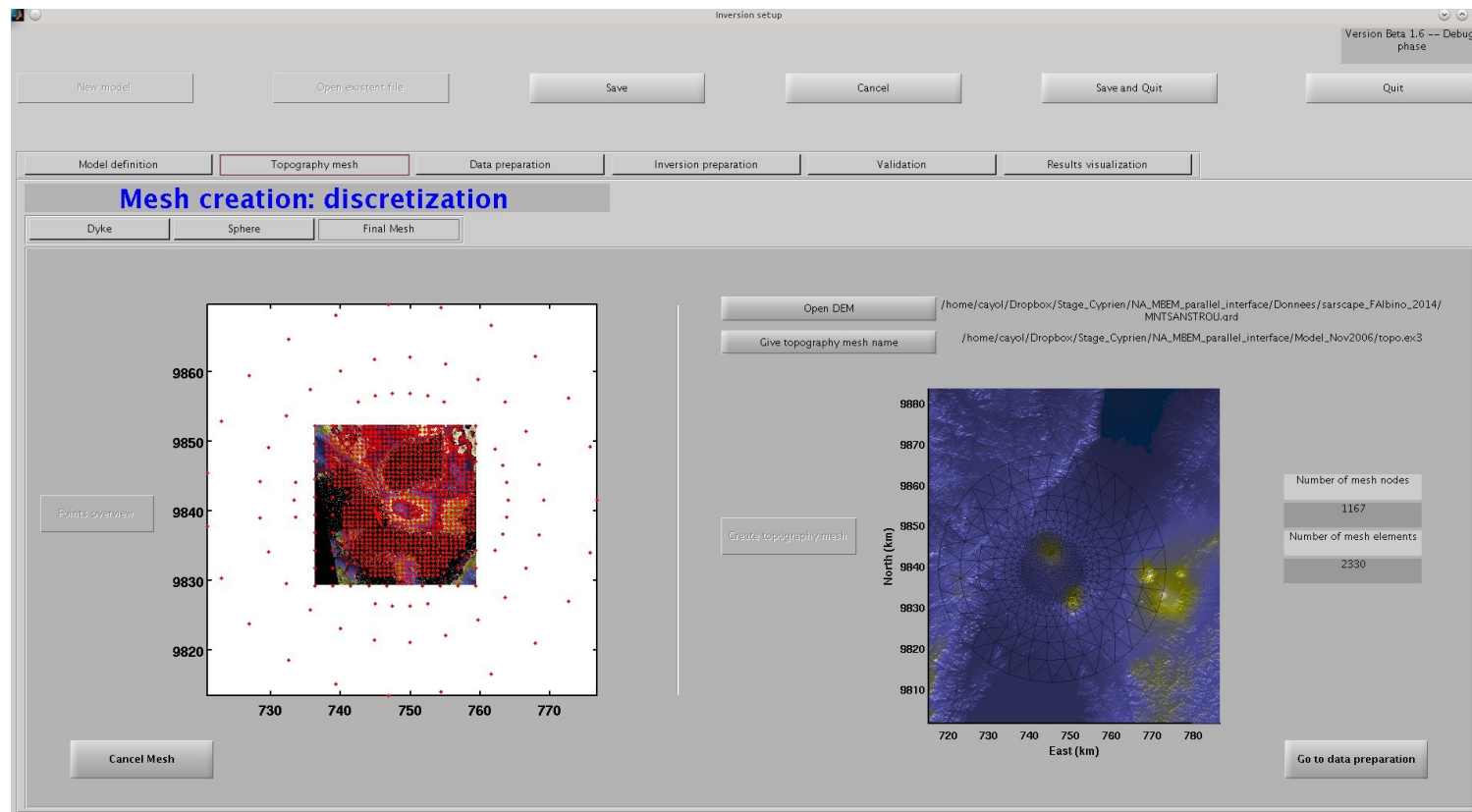
- Déterminer la position et la forme des « réservoirs » de magma
- Déterminer la force qu'ils exercent sur « l'édifice »

PRINCIPAUX AXES DE TRAVAIL EN VOLCANOLOGIE

- Surveillance
- Campagnes de terrain (hors et pendant les éruptions)
 - Mesures
 - Entretien des instruments fixes
 - Analyse chimiques (roches et lave)
- Modélisation (simulation, analyse, et prévision)

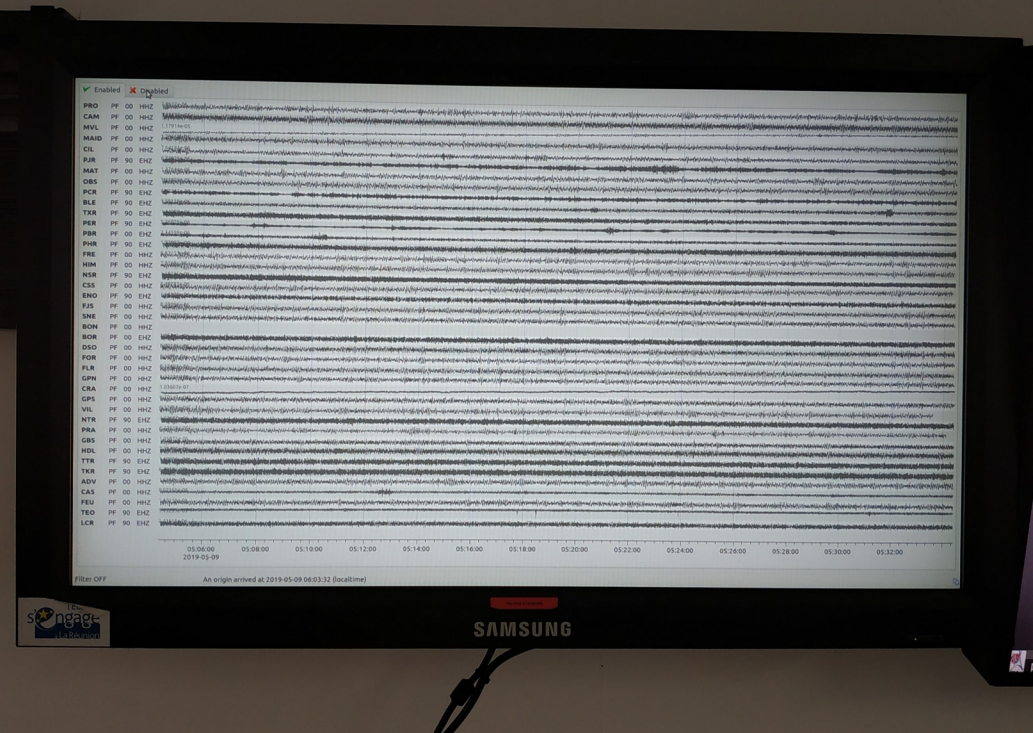
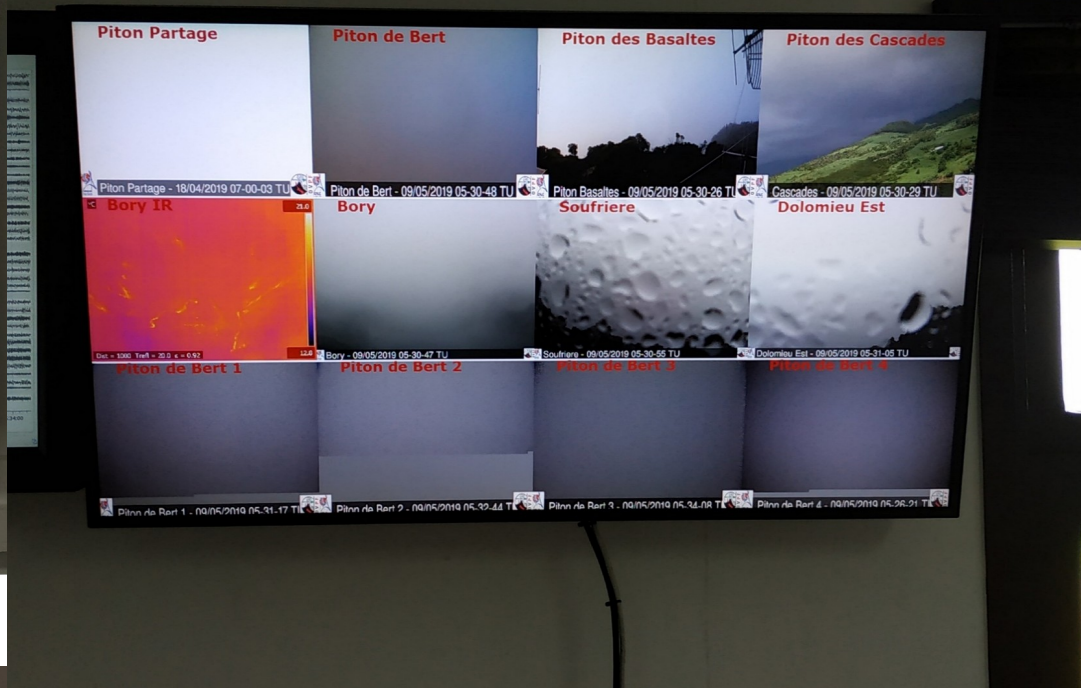
UN TRAVAIL INTERDISCIPLINAIRE

- Groupe de travail constitué de géophysiciens et mathématiciens :
 - A. Barnoud (IGN), V. Cayol (Clermont-Fd), J.L. Froger (Saint-Etienne), D. Smitarello (Luxembourg)
 - O.B., P.H. Cocquet (Pau), J. Koko (Clermont-Fd), N. Nasr (Rouen)
- Objectifs pratiques à destination de toute la communauté (production et utilisation de logiciels libres et gratuits)



L'environnement DefVolc que nous produisons

SURVEILLANCE

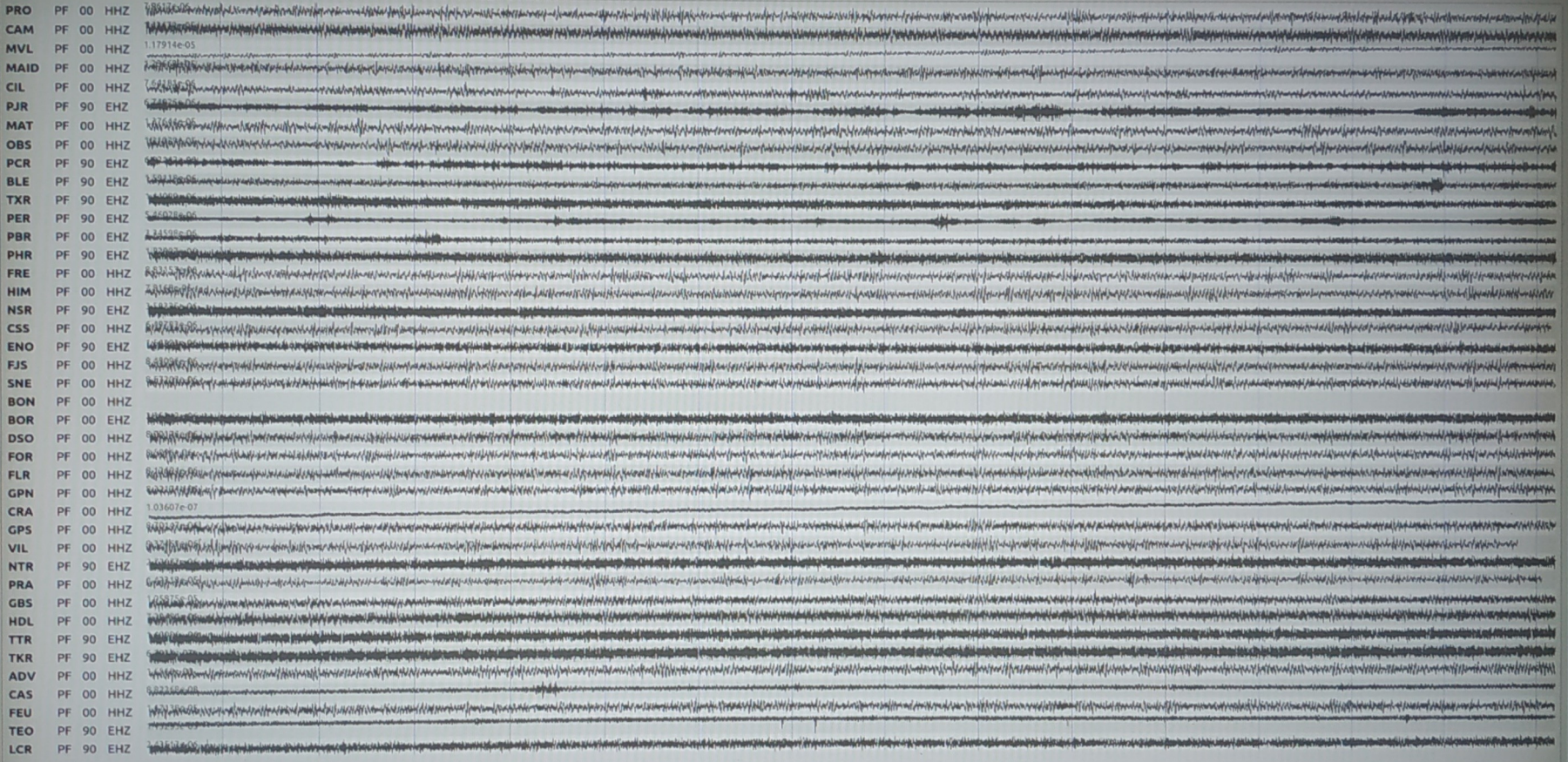


Extensomètres

Caméras

Sismographe

Enabled Disabled



05:06:00 05:08:00 05:10:00 05:12:00 05:14:00 05:16:00 05:18:00 05:20:00 05:22:00 05:24:00 05:26:00 05:28:00 05:30:00 05:32:00

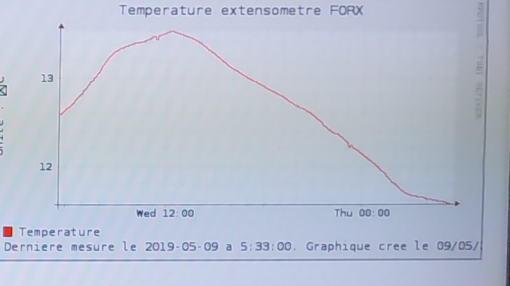
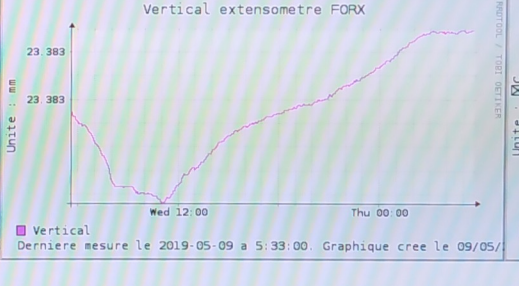
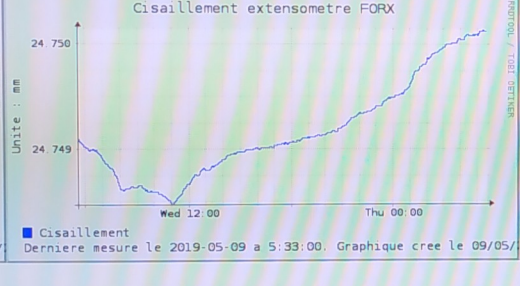
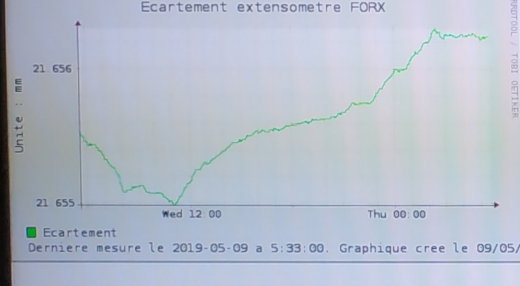
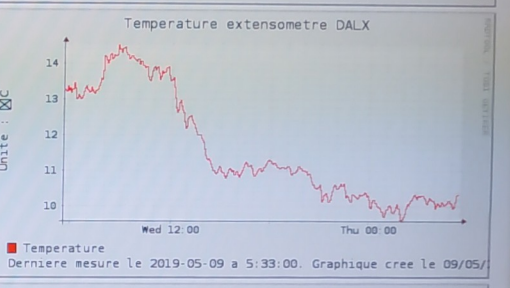
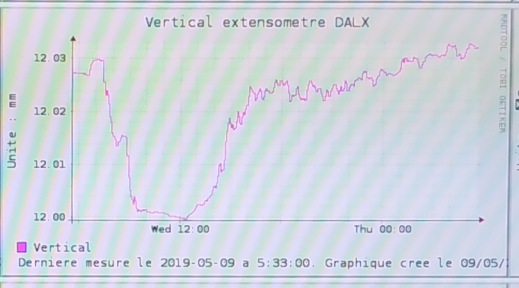
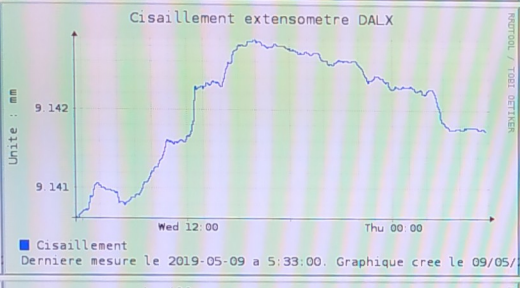
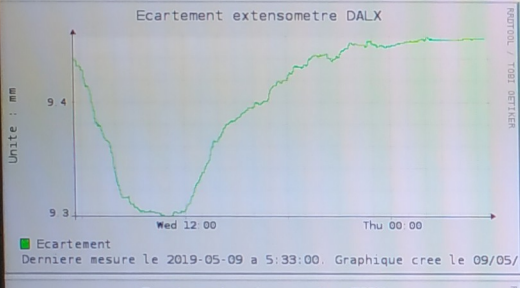
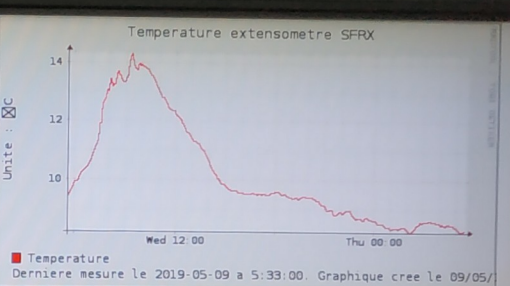
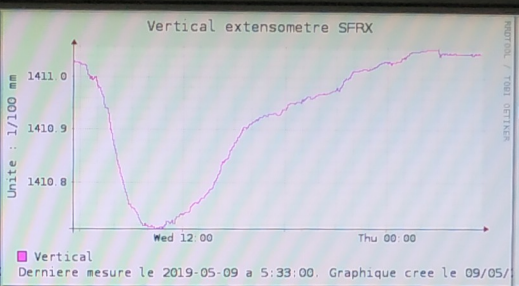
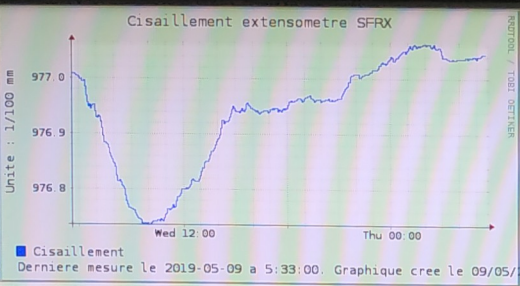
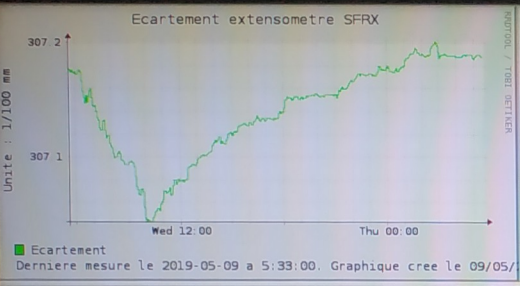
2019-05-09

Filter OFF

An origin arrived at 2019-05-09 06:03:32 (localtime)



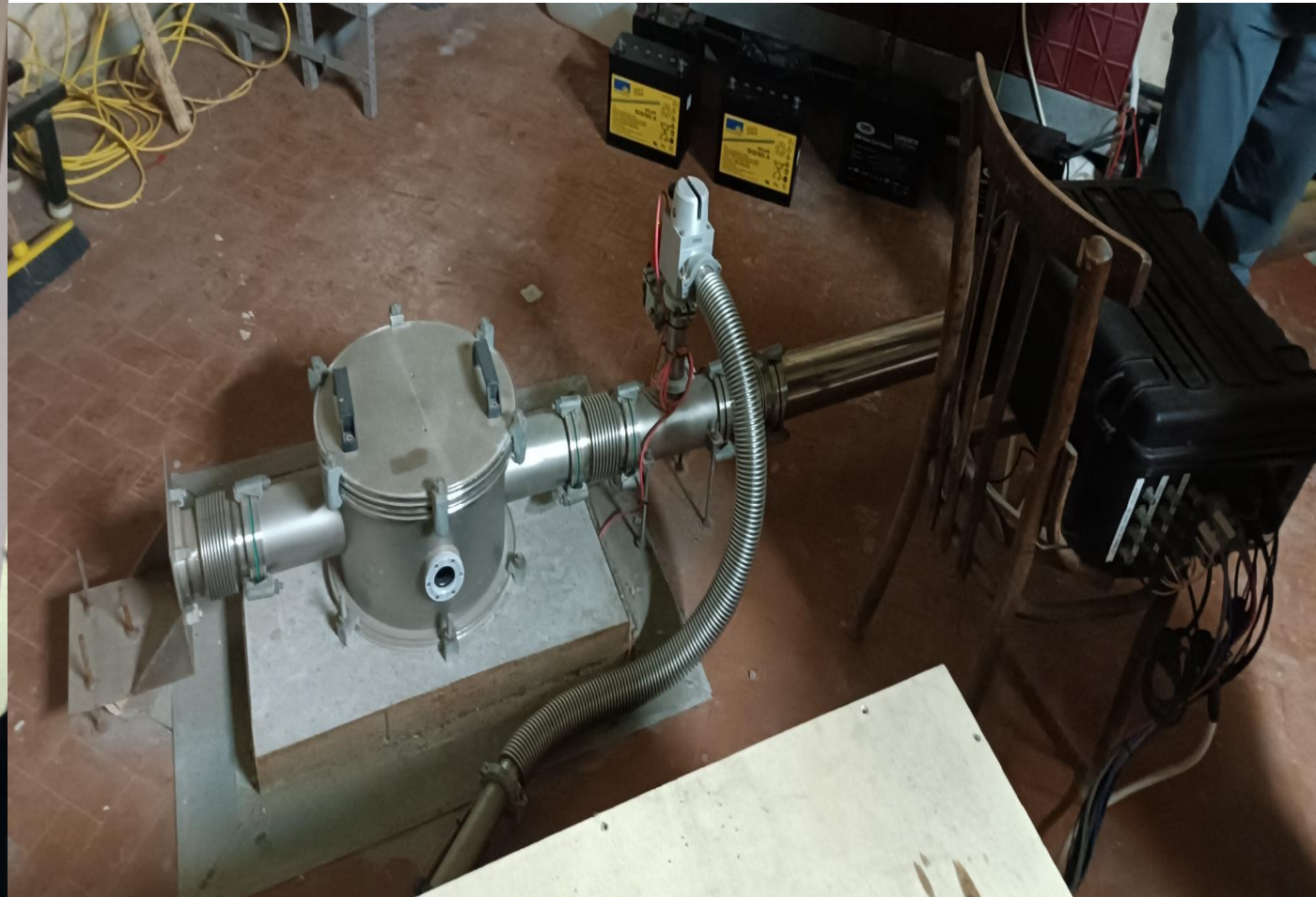
SAMSUNG



Catane (Sicile) - Salle de contrôle Etna- Stromboli



Etna (Sicile) - Mesures de déformation planaire par laser



Etna (Sicile) - Mesures de variations de gravité



(Gravimètre quantique)

Etna (Sicile) - Mesures de variations de gravité



(Observatoire astronomique de l'Etna)

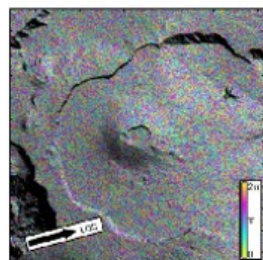
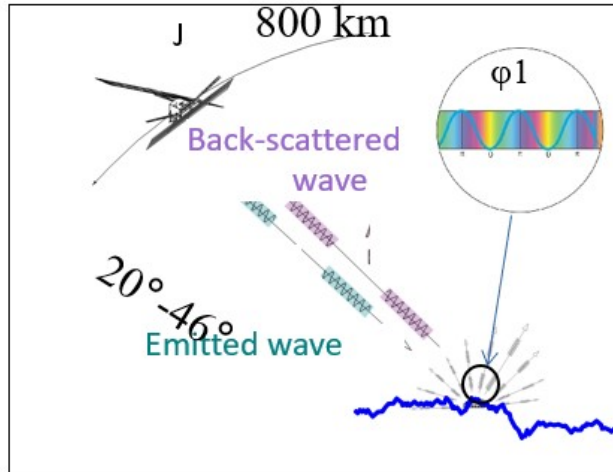


(Gravimètre à supraconductivité)

INTERFEROMETRIE RADAR

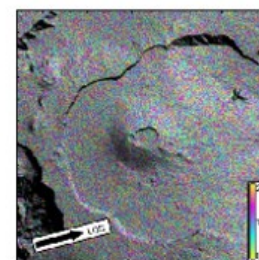
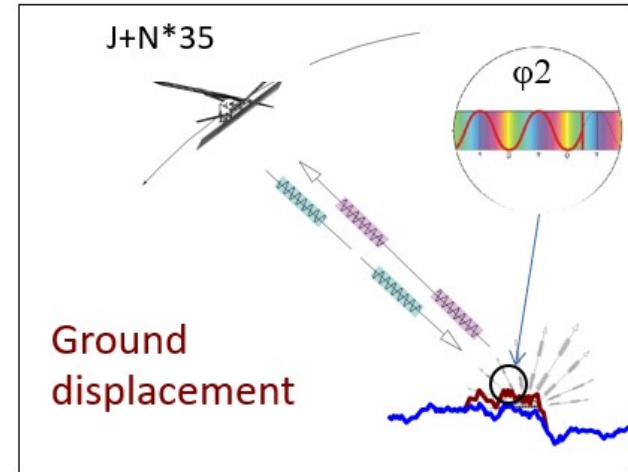
- Des satellites passent périodiquement (6 à 30 jours) en orbite au dessus de certains sites
- Ils émettent des ondes radar et reçoivent leurs échos
- En 2 passages on peut ainsi déterminer si le terrain se déplace

1. Computation of a first radar image at date J: phase for each ground target



Phase map 1

2. Acquisition at a second date J + N*12: two phase images

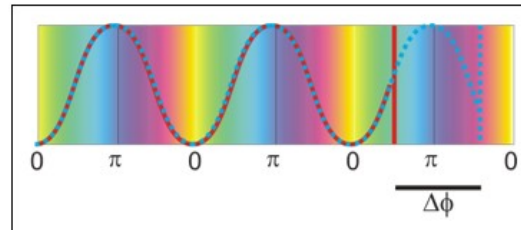


Phase map 2

INTERFEROMETRIE RADAR

- Des satellites passent périodiquement (6 à 30 jours) en orbite au dessus de certains sites
- Ils émettent des ondes radar et reçoivent leurs échos
- En 2 passages on peut ainsi déterminer si le terrain se déplace

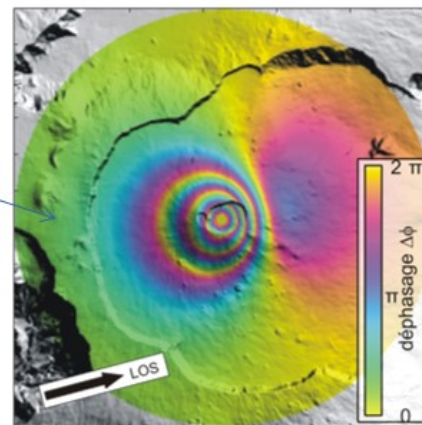
3. Interferogram = difference between two phase images
($\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$) -> Interference fringes



→ **Displacement measurement between these two dates projected along the Earth-satellite direction**

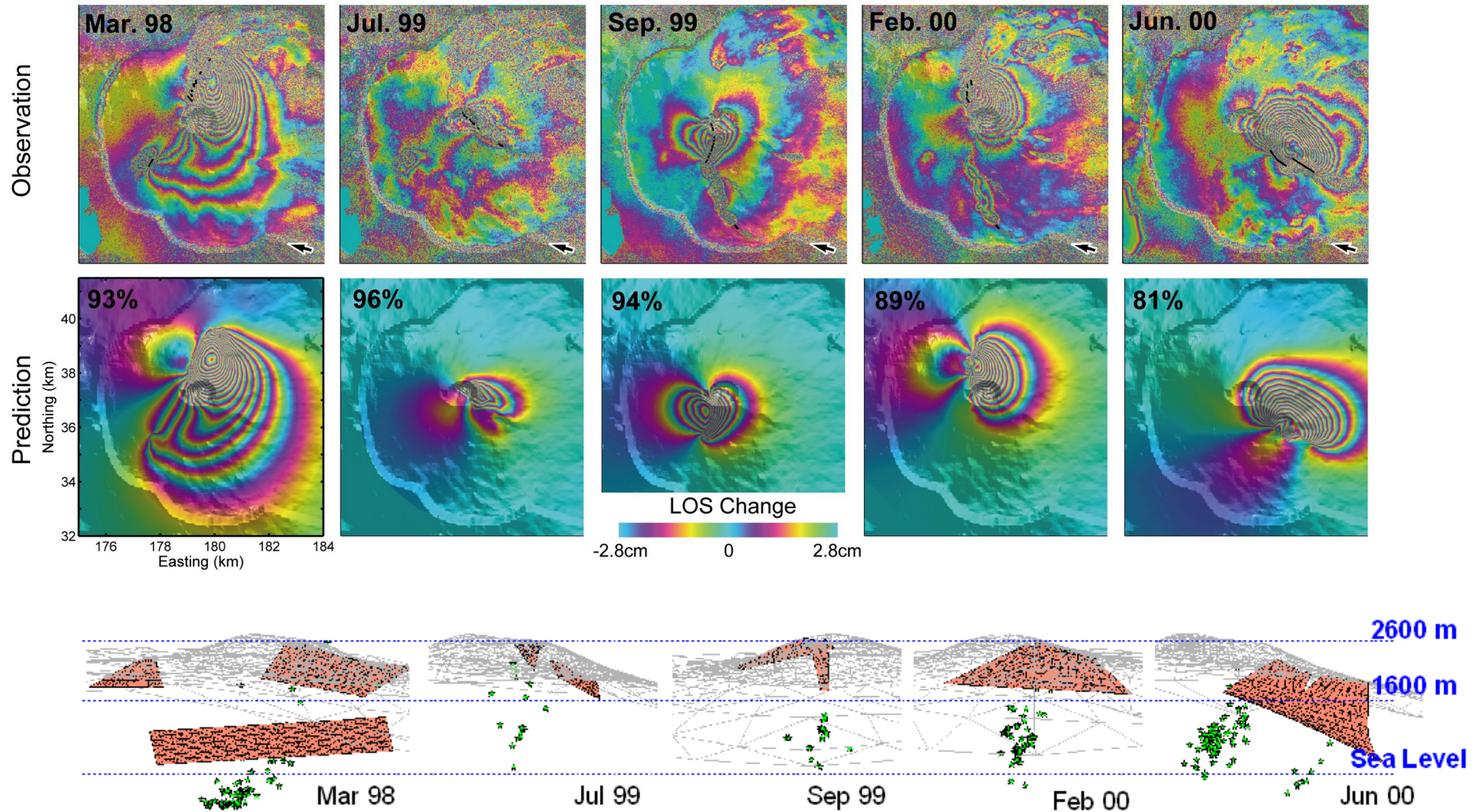
If $\lambda = 2\pi = 6$ cm, we have
 $\Delta L = 4x\lambda/2 = 12$ cm of displacements
toward the satellite

Line-of-Sight (LOS) displacement



Exemple : éruptions de Mars 1998 à Juin 2000

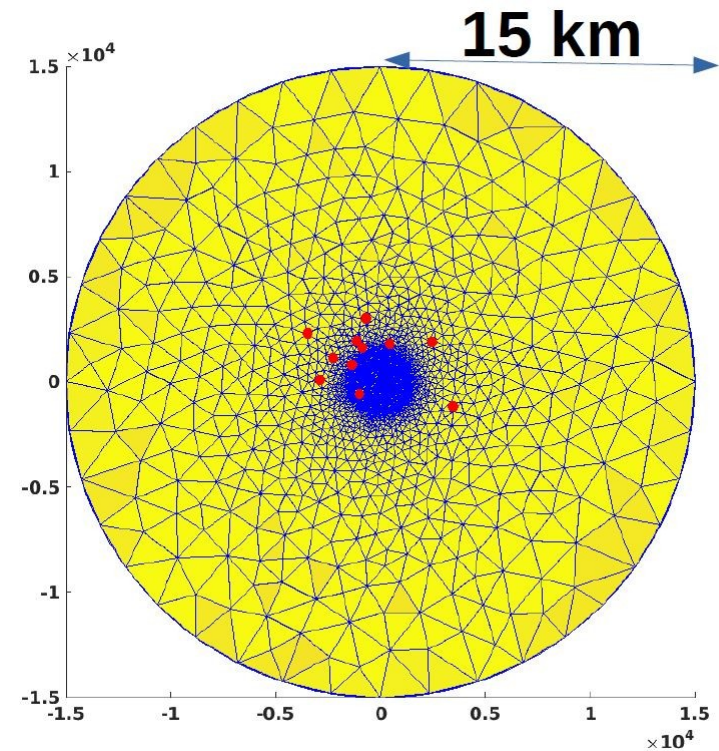
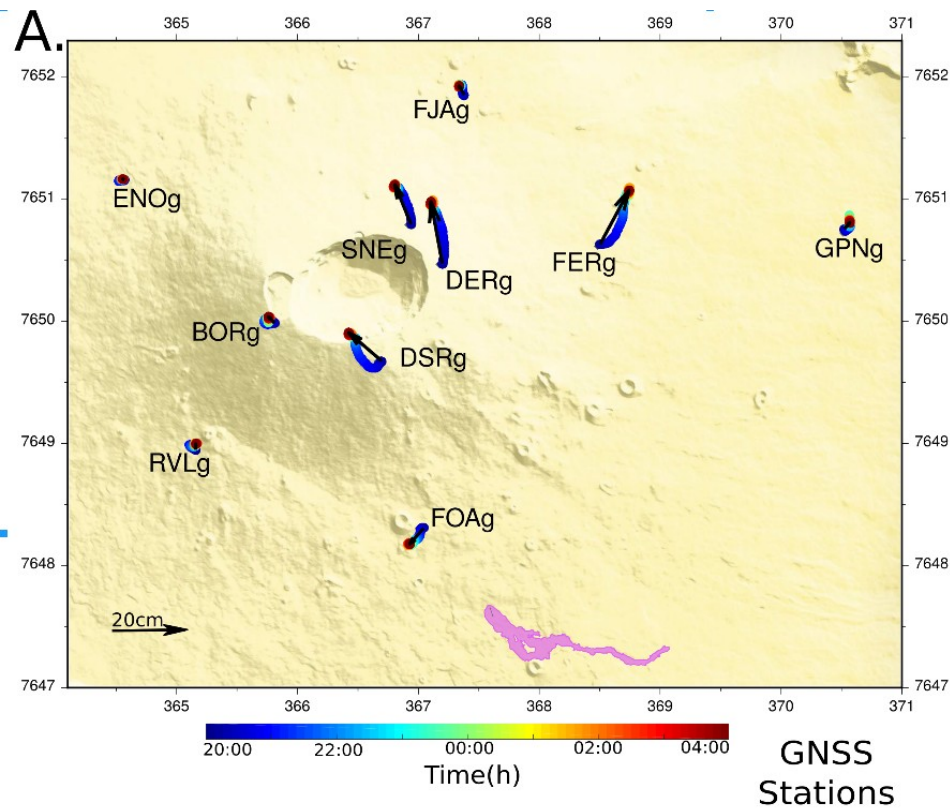
(Fukushima et al., JGR, 2010)



☆ Relocated micro-earthquakes (J. Battaglia)

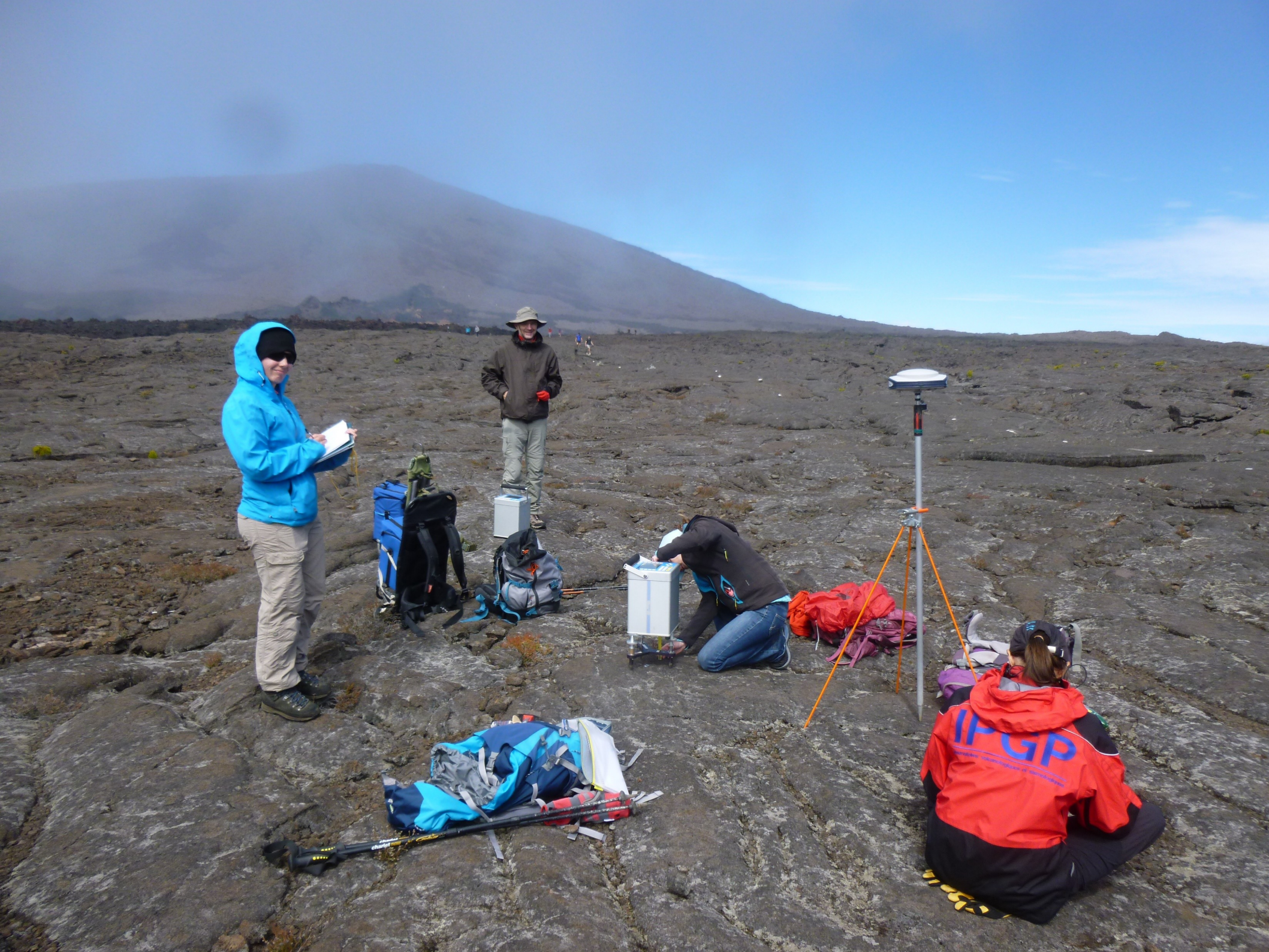
MESURES PAR SATELLITES GNSS

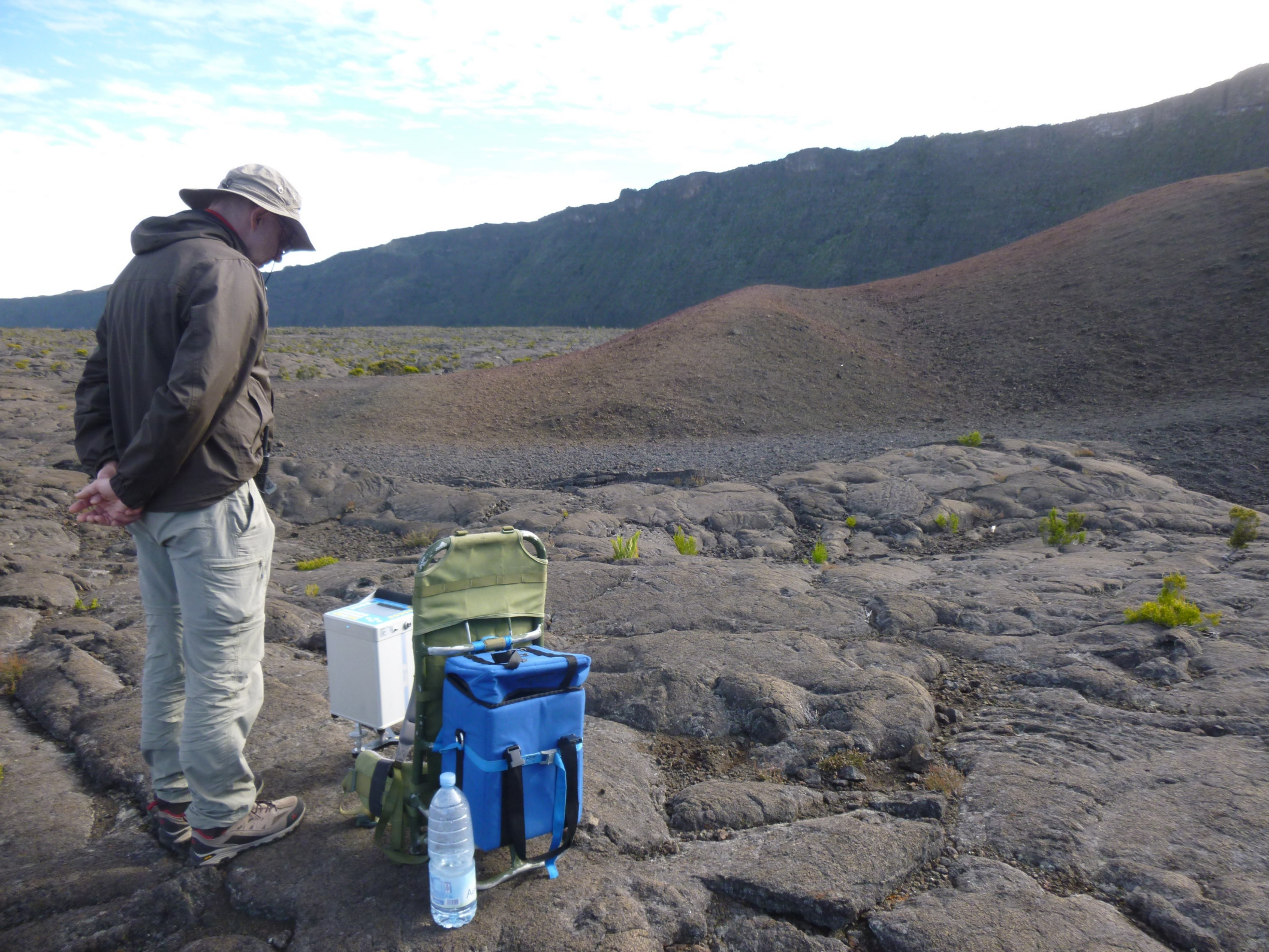
- Global Navigation Satellite System (GNSS) = GPS
- Équipements de mesure sur site (maintenance)
- Peu de points de mesure



Stations GNSS au Piton de la fournaise

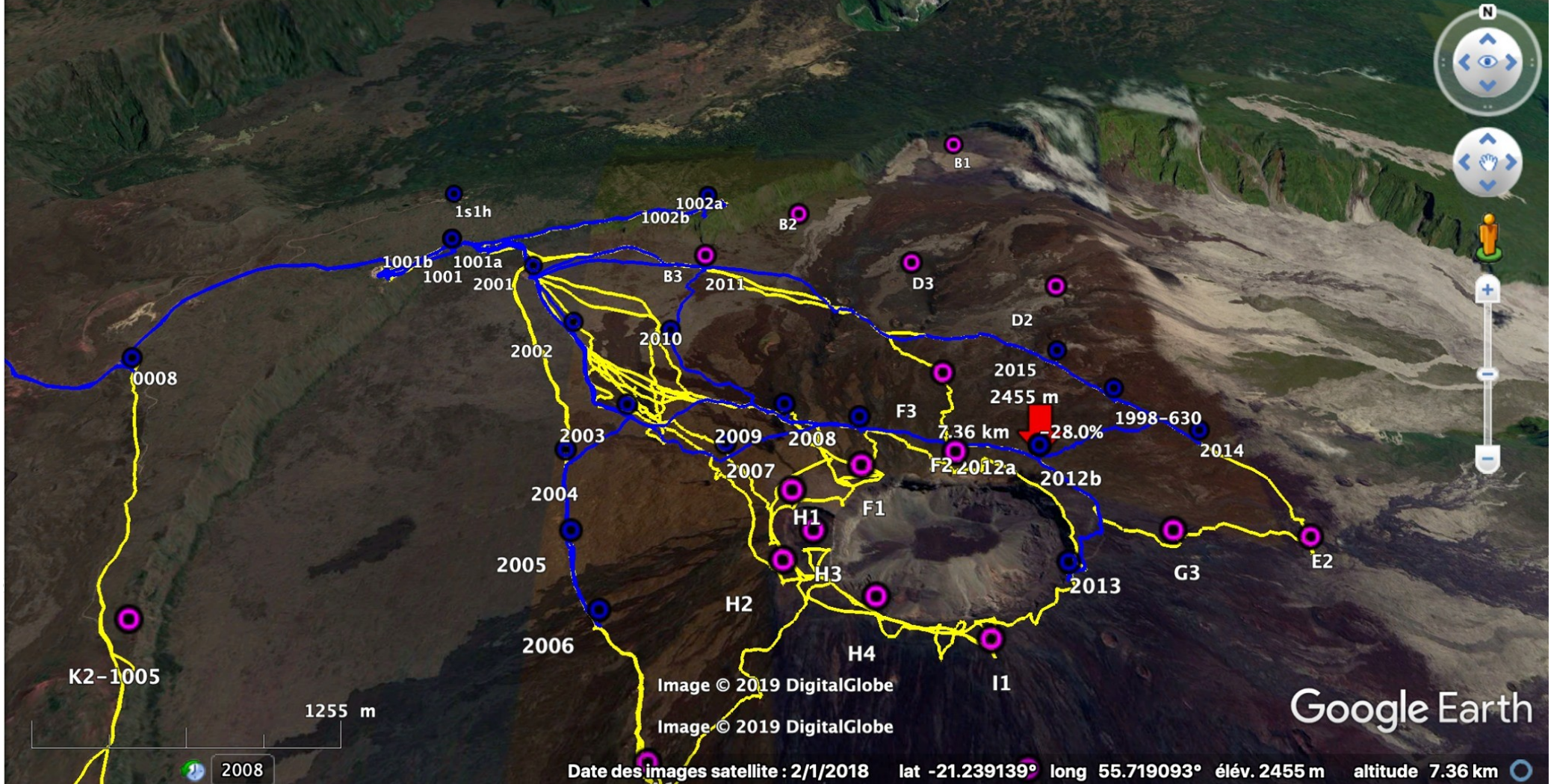
TERRAIN









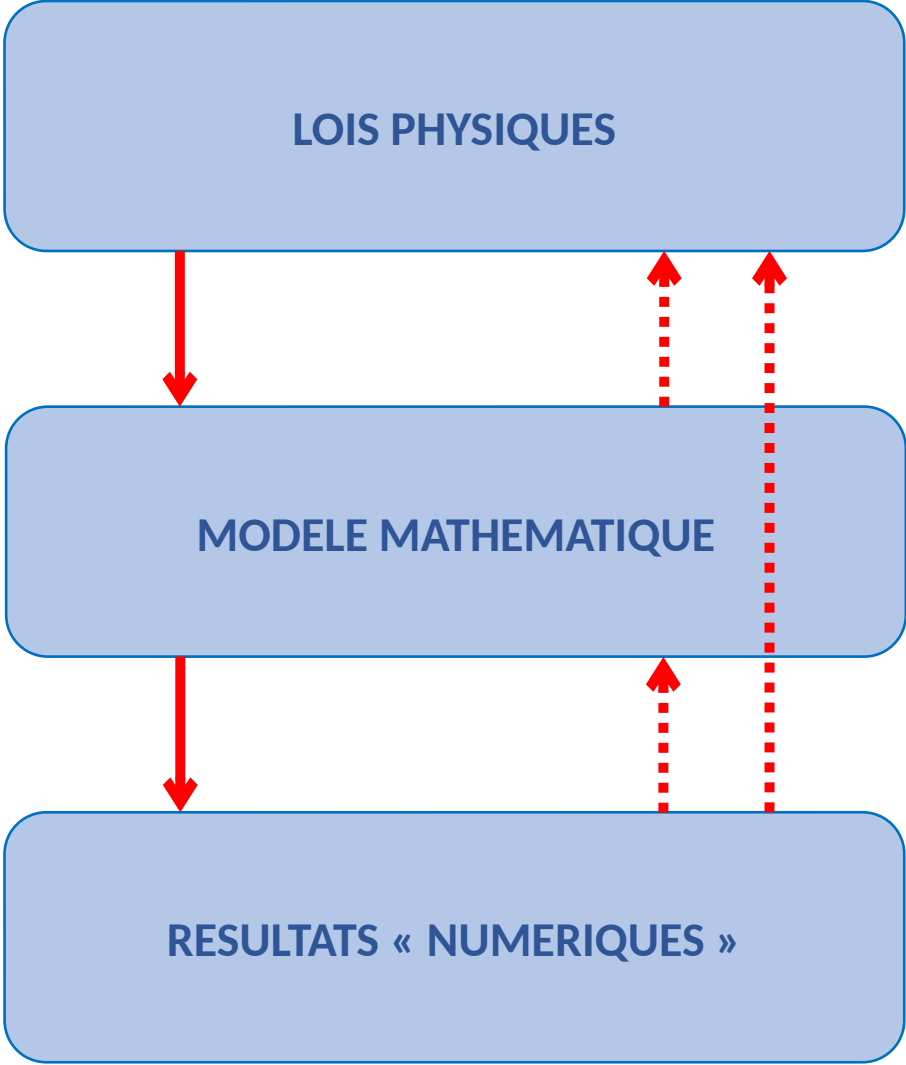


Graphique : Min, Moy., Max **Élévation : 2009, 2273, 2486 m**
 Totaux des plages de valeurs : **Distance : 15.0 km** **Gain/perte d'élévation : 884 m, -876 m** **Pente maximale : 39.7%, -42.4%** **Pente moyenne : 8.8%, -13.8%**

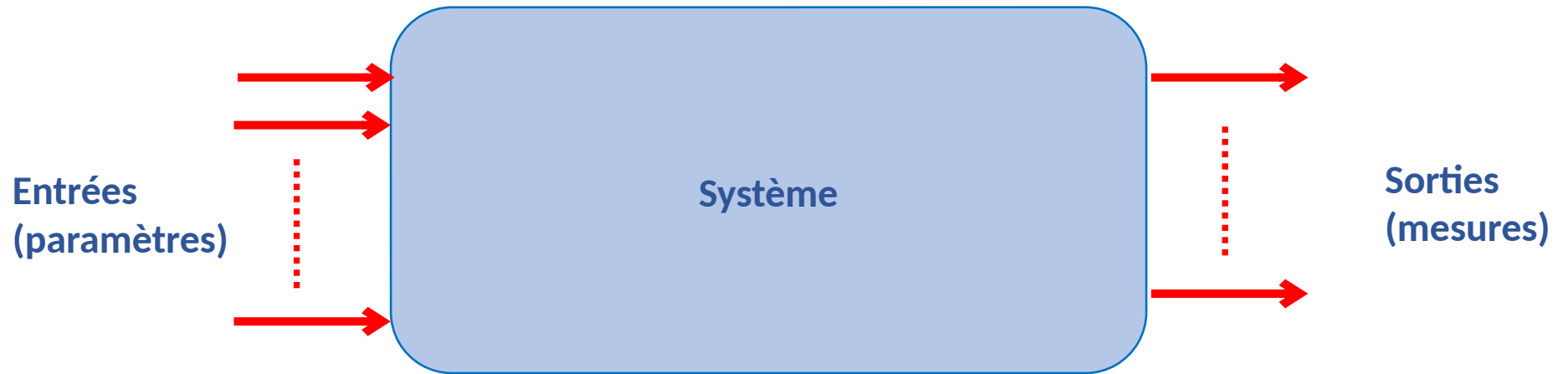


MODELISATION

MODELISATION

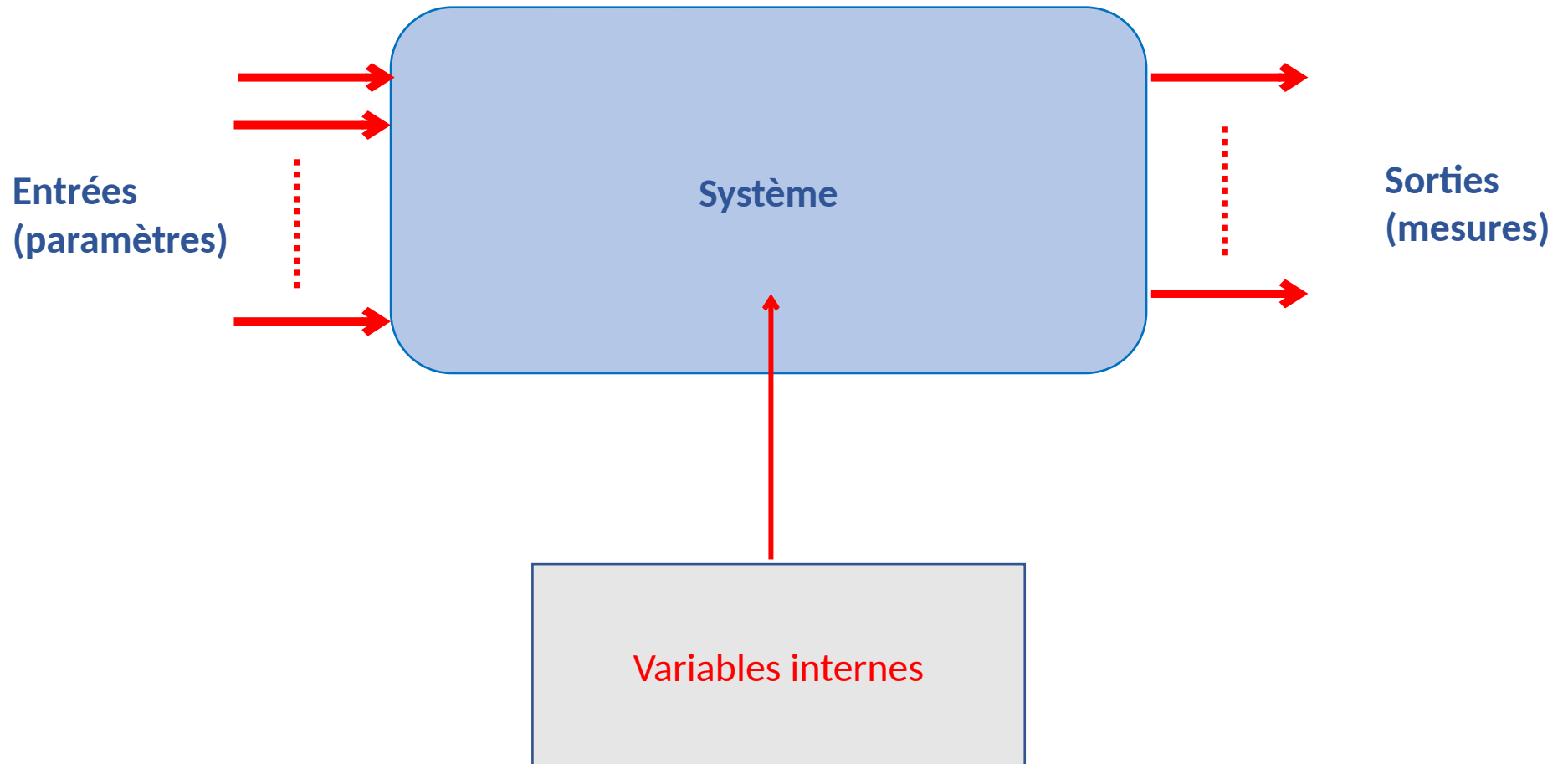


MODELISATION (EMPIRIQUE)

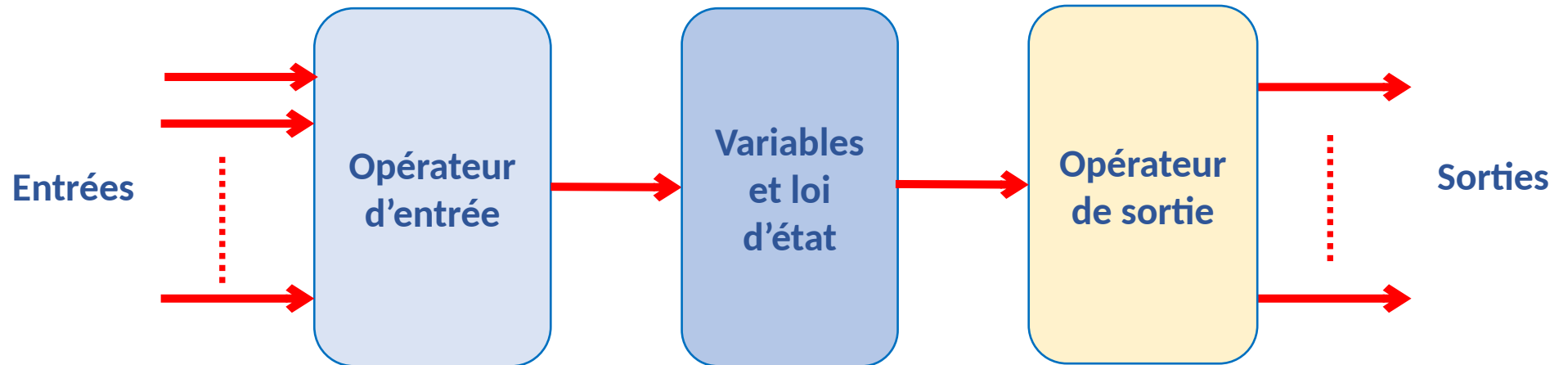


- Exemple : un four
 - Entrée : on tourne un bouton
 - Sortie : on obtient une température
- On connaît la réponse pour certains ensembles d'entrées et de sorties, mais on n'explique ni ne comprend le phénomène étudié.

MODELISATION (PHYSIQUE)

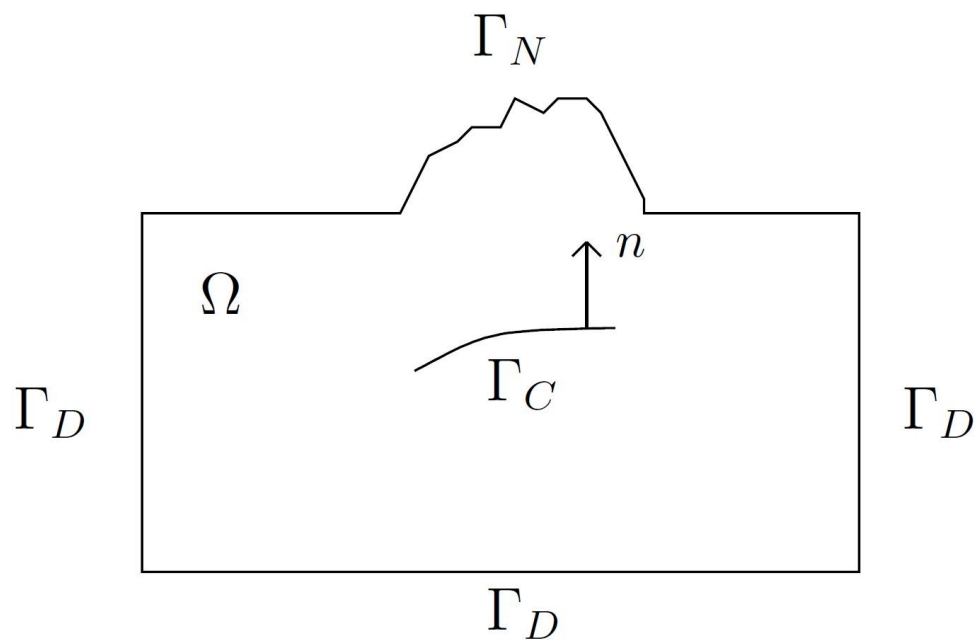
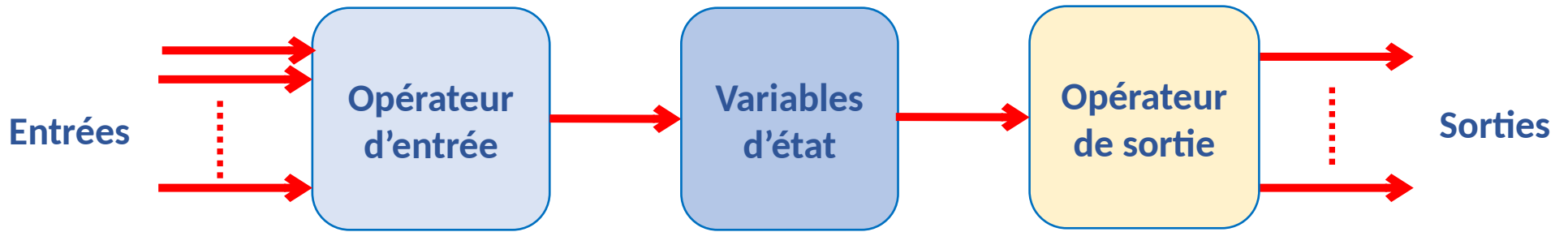


MODELISATION (PHYSIQUE)



- Entrées et leur opérateur : action sur le système
- Variables et loi d'état : le modèle du système à proprement parler
- Opérateur de sortie : ce qu'on peut observer du système

Exemple pour un volcan



Entrées :

- Forme et localisation de la fracture / du réservoir magmatique
- Force exercée sur la fracture

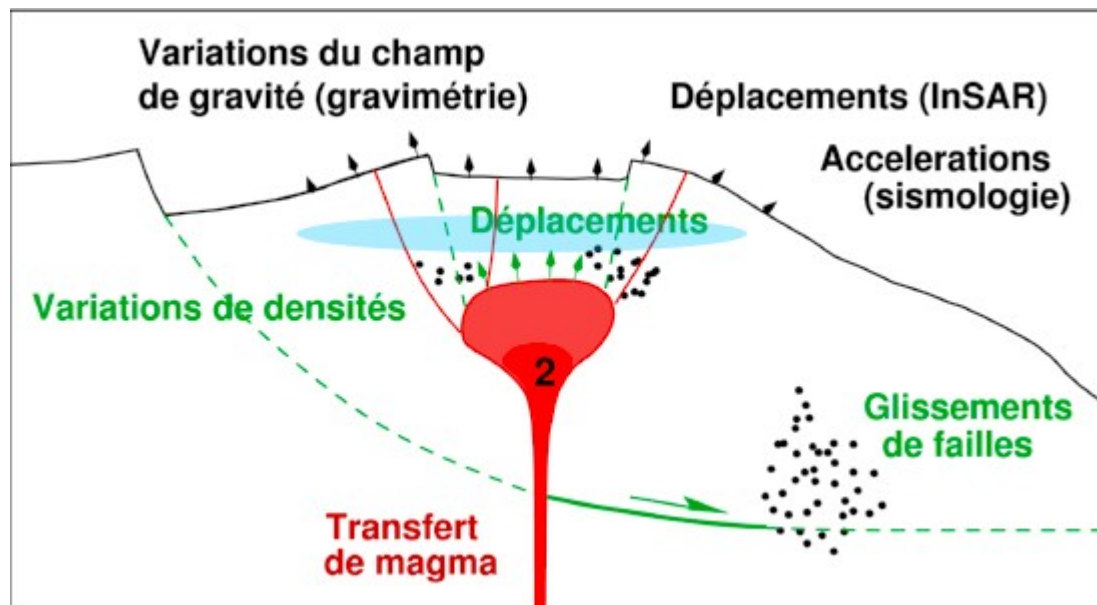
Sorties :

- Déformation du sol (en certains points)
- Variations de la gravité au niveau du sol

Variables internes :

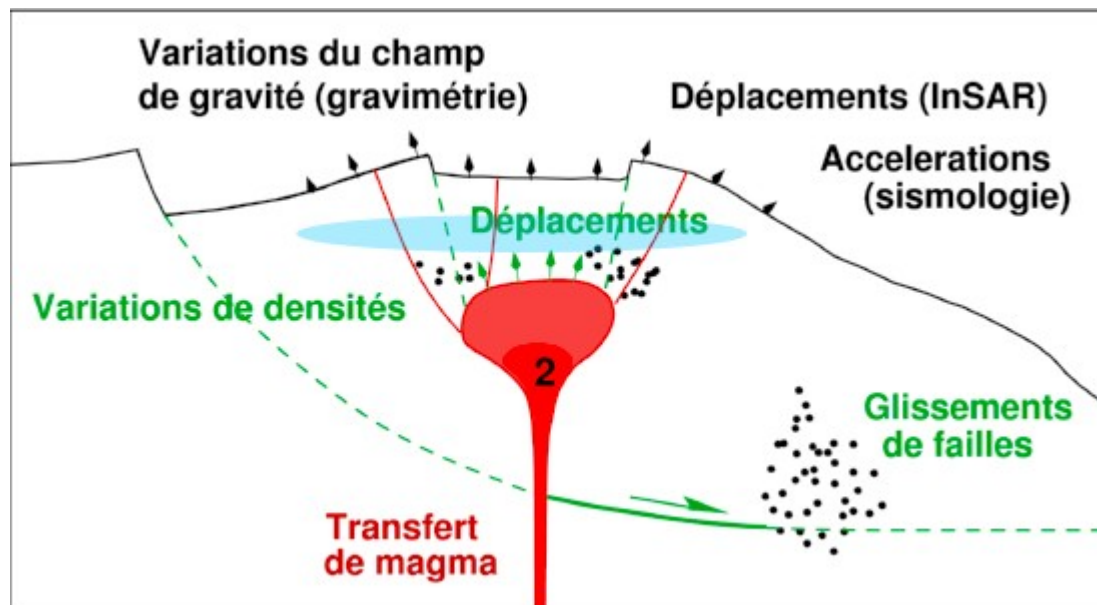
- Déformation de tout le volcan
- Champ de gravité global

QUE SAIT-ON ?



- Mesurer la déformation du sol (*GPS et Satellites*)
- Mesurer des micro-variations de la gravité (*modifiée par l'intrusion de magma*)
- Déterminer le type de terrain (*en envoyant des ondes à travers le sol*)

QUE VEUT-ON ?



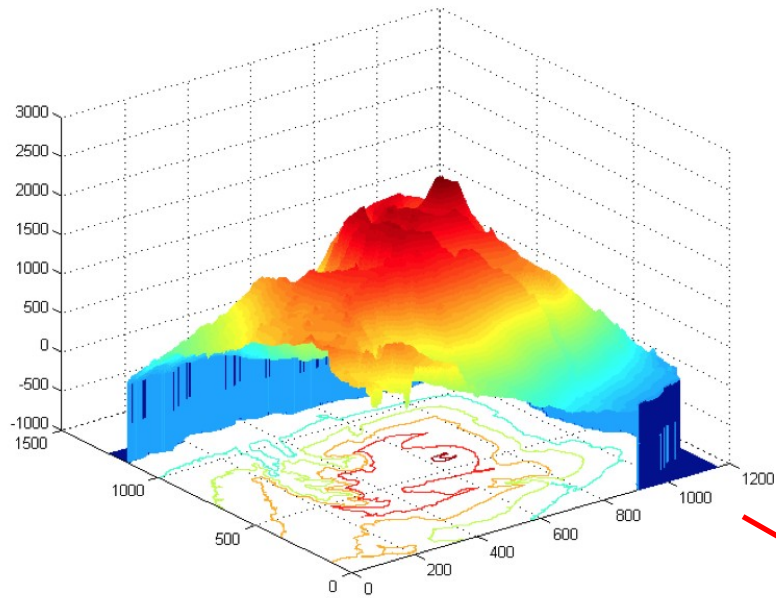
Problèmes directs

- Connaissant la position du magma, déterminer la déformation du sol
- (Travaux en cours) : déterminer les variations de gravité

Problèmes inverses

- Déterminer la position et la forme des « réservoirs » de magma
- Déterminer la force qu'ils exercent sur « l'édifice »

PROBLEME DIRECT EN VOLCANOLOGIE

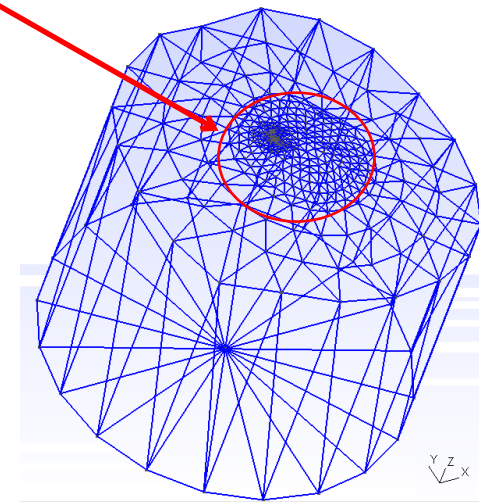


Le piton de la fournaise (données IGN)

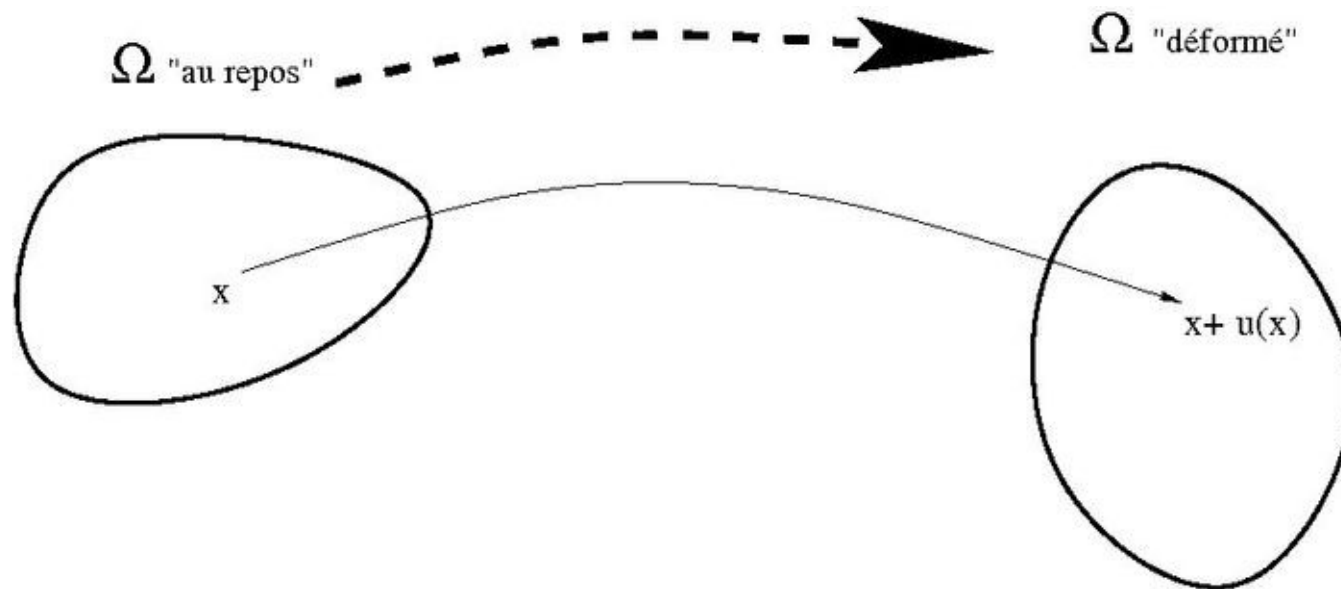
- Grands objets à étudier
- Petites déformations (moins de 1m)



Roche = solide élastique !!!!

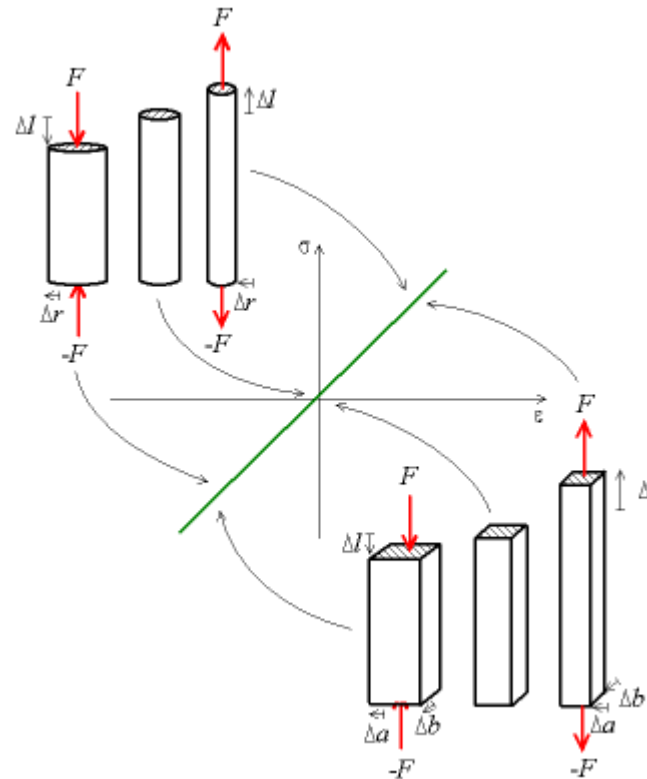


DEFORMA TION



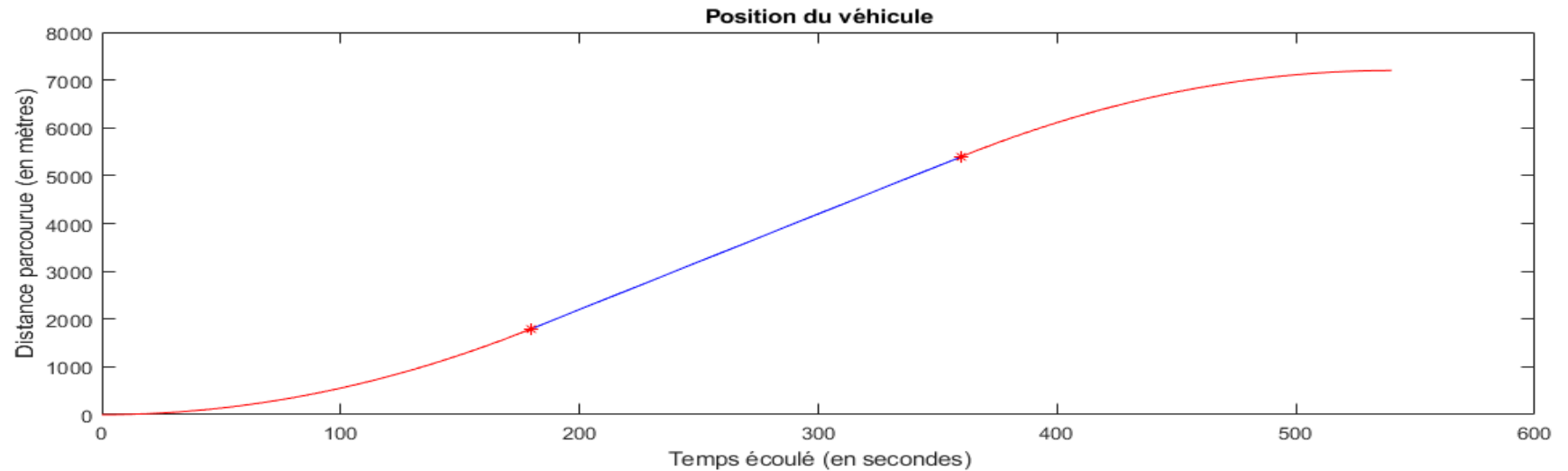
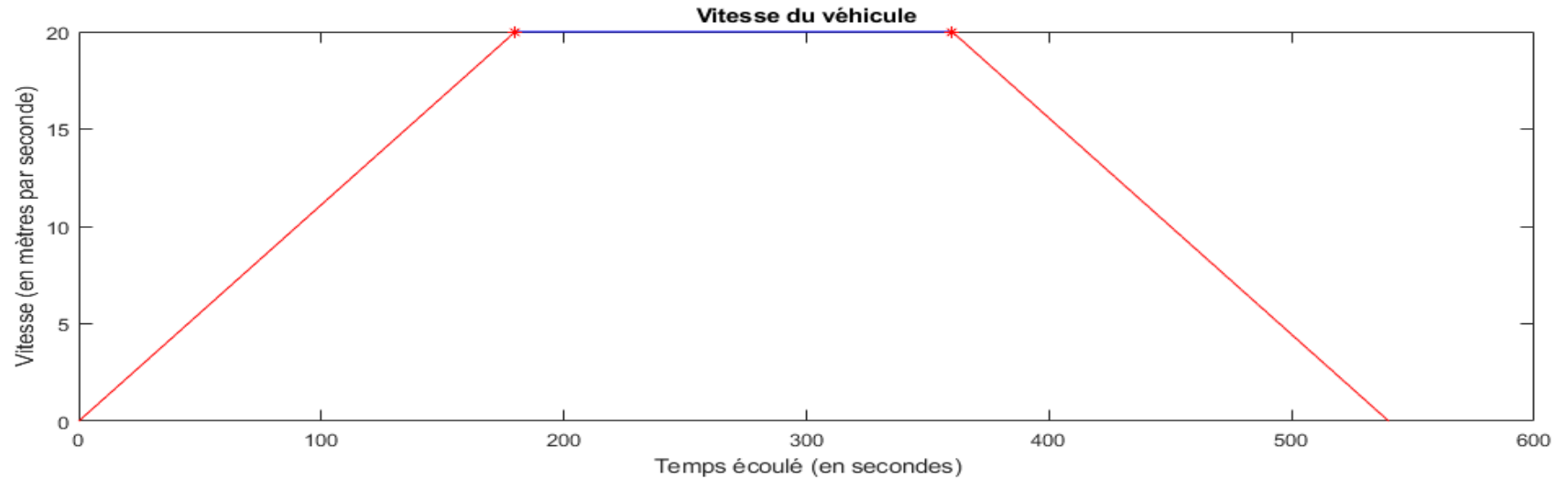
- X est un point de l'espace : $X = (x,y,z)$
- u est un **vecteur** qui donne le déplacement du point $X=(x,y,z)$ de l'objet lorsqu'il se déforme : $U = (u,v,w)$.
- On cherche en fait une **fonction** de X , qu'on note U

DEFORMATION - LOI DE COMPORTEMENT



- On fait le **bilan des forces** sur un « petit cube » dans l'objet
- On fait tendre la taille du « cube » vers 0
- On obtient des **équations** (qui font intervenir des **dérivées** de $U = (u,v,w)$)

DERIVEE ?

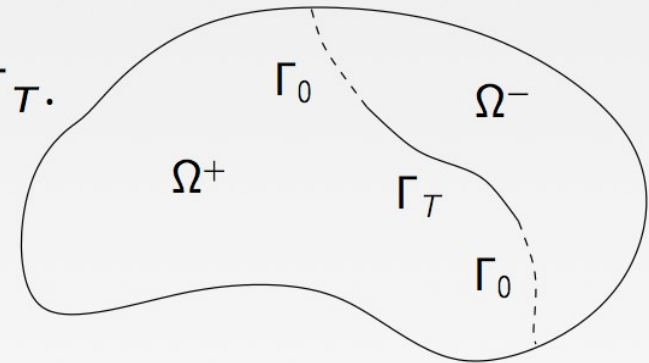


- La dérivée représente la vitesse de variation d'une quantité
- La déformation d'un volcan possède des dérivées dans 3 directions

Diapo pour faire plaisir aux profs de maths

The displacement inside the volcano is assumed to satisfy:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma_S(u) = f & \text{in } \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ u = u_{\partial\Omega} & \text{on } \partial\Omega, \\ (\sigma_S(u)n)^\pm = pn^\pm & \text{on } \Gamma_T, \\ [u] = 0 & \text{across } \Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_T. \end{array} \right.$$



with $\sigma_S(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda(\operatorname{div} u)\mathbf{I}_{\mathbb{R}^d}$,

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T), \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

and


$$[u] = u^+ - u^- \quad (\text{the jump across } \Gamma_0).$$

- u : displacement field
- p : pressure on the crack
- n : unit normal vector on the crack

ROLE DU MATHEMATICIEN

- Analyse du modèle : est-il bien posé ?
- Propriétés « qualitatives » et « quantitatives »
- Méthodes pour **approcher** la solution des équations

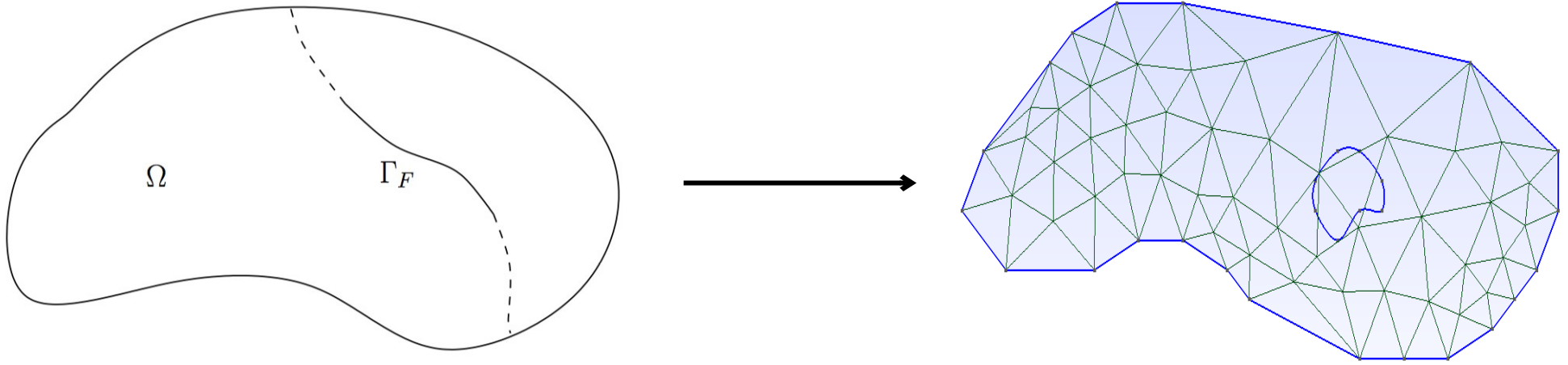

$$3U + 2 = 5$$



**On n'est pas capable d'écrire
explicitement $U(X) = \dots$
en fonction des forces exercées**

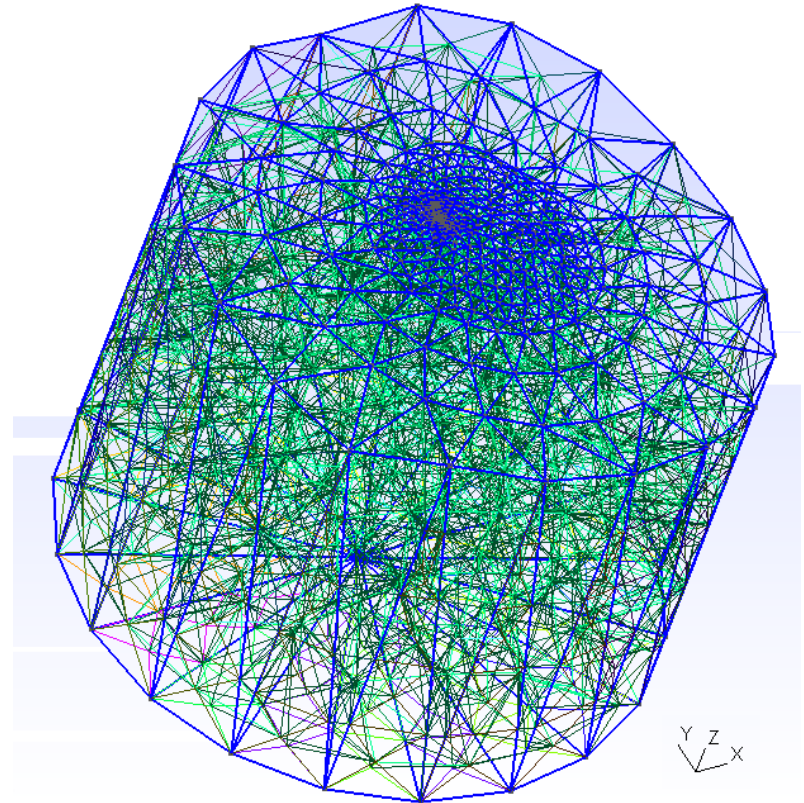
APPROXIMATION ?

Calcul d'un nombre infini d'inconnues : impossible !



On calcule une *approximation* des solutions en certains points de l'objet étudié.

APPROXIMATION !



Réalisme : développement de méthodes précises



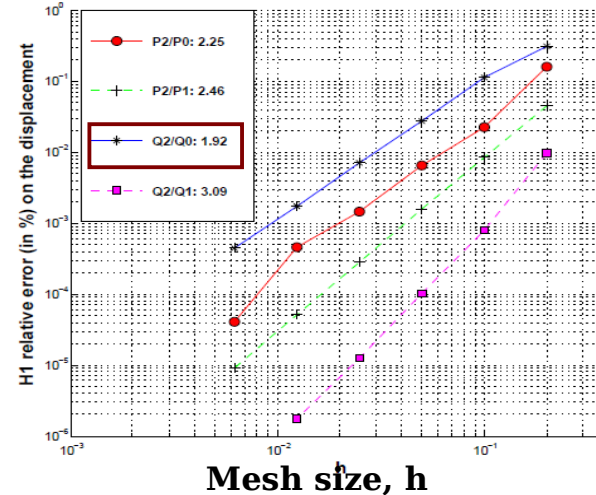
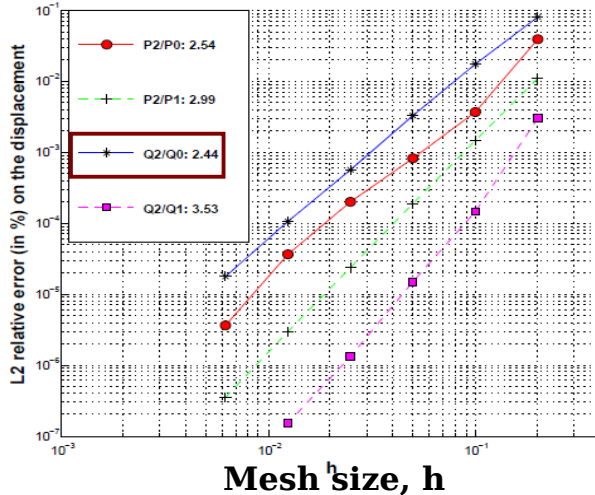
Beaucoup d'inconnues à calculer



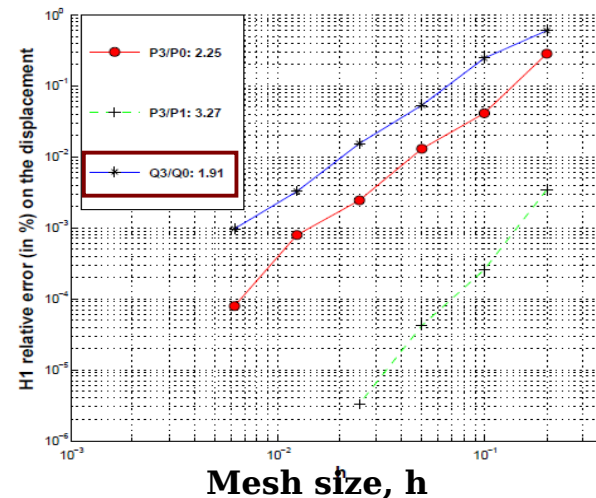
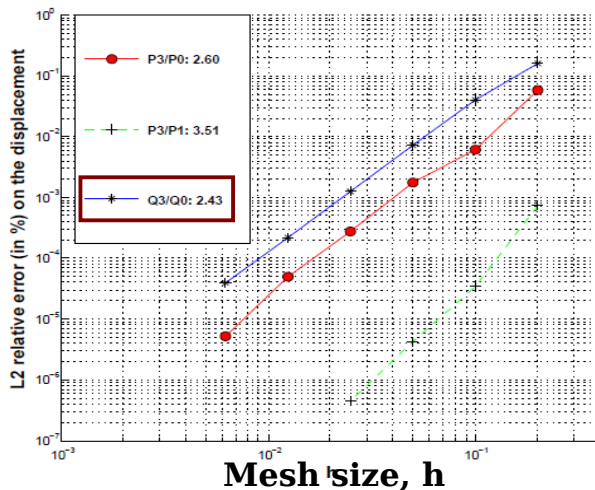
Développement d'algorithmes efficaces

QUALITE DE L'APPROXIMATION

- On connaît dans des cas simples des solutions explicites (sol plat, source sphérique...)
- On compare le résultat des programmes à ces solutions pour valider les méthodes
- On étudie la qualité théorique.



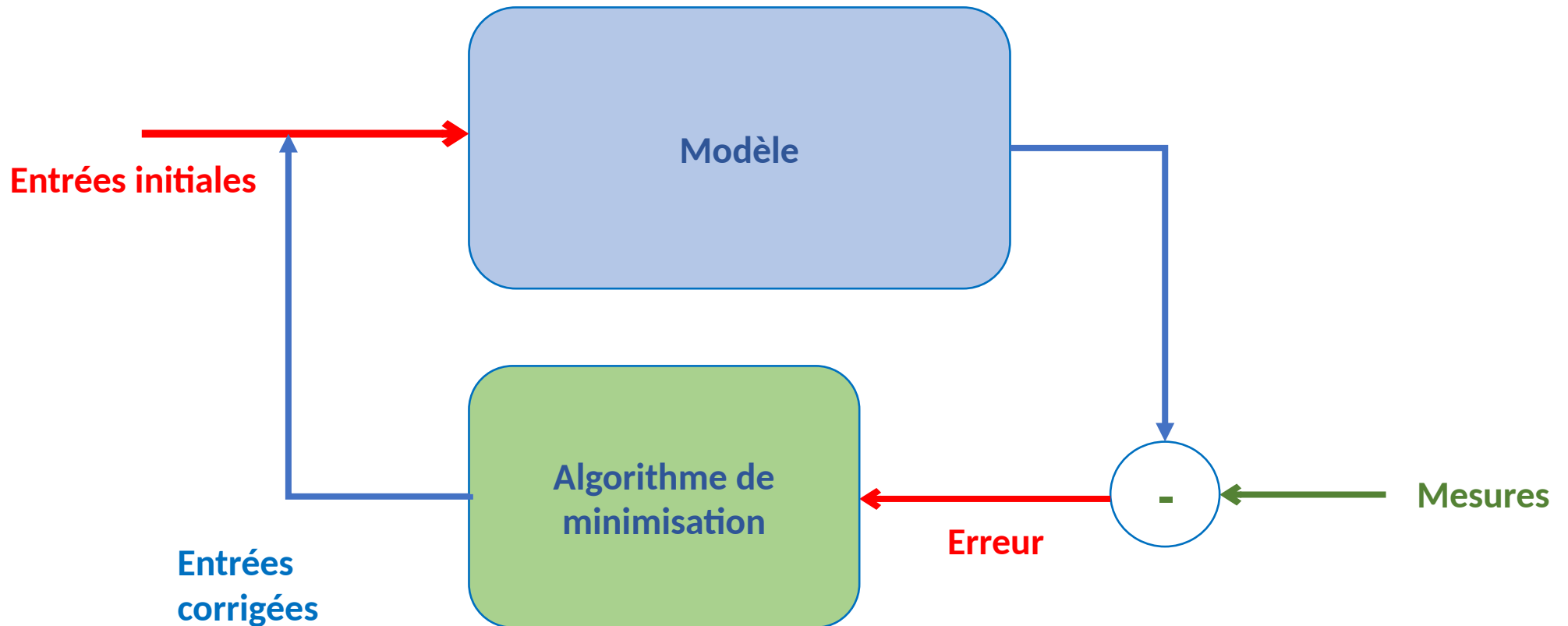
qualité



➡ Ici « h » représente la distance entre les points de calcul : h petit = plus de points

Problème inverse

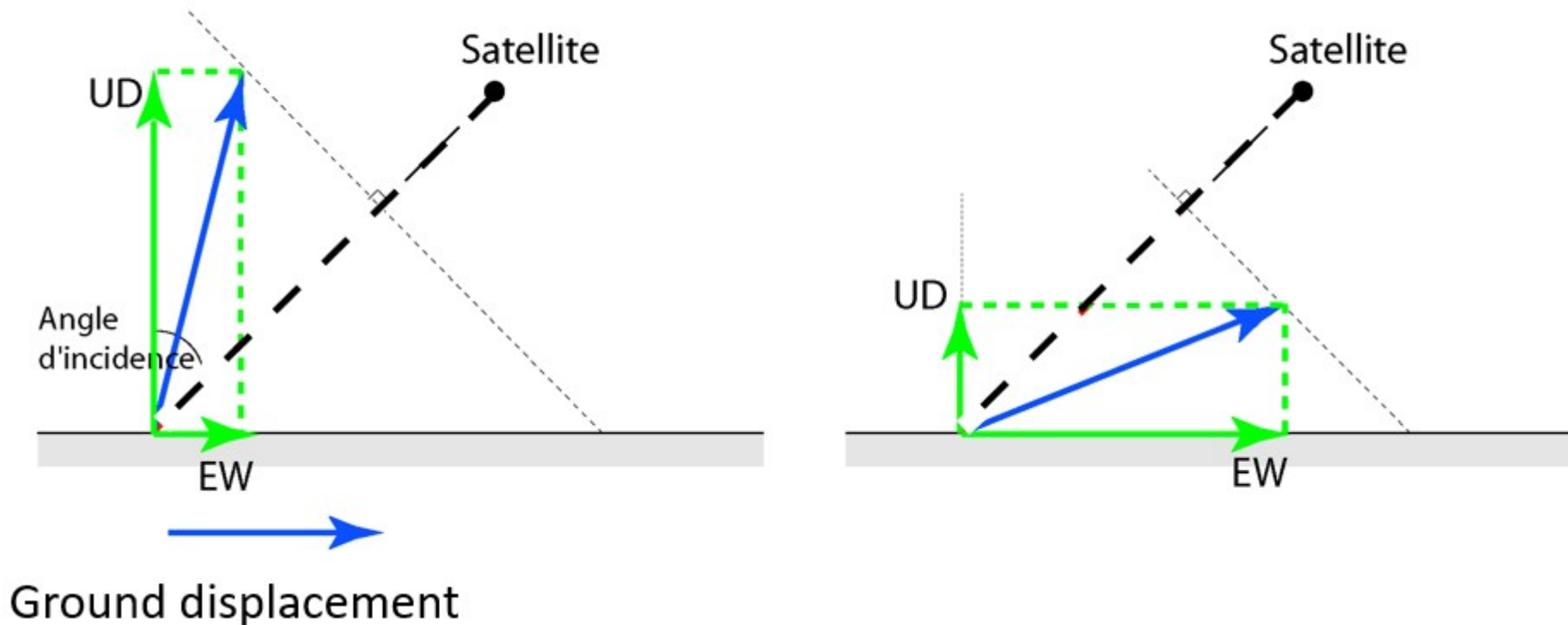
- Déterminer la position et la forme des « réservoirs » de magma
- Déterminer la force qu'ils exercent sur « l'édifice »



- Un calcul direct peut être long sur un problème réaliste
- On a besoin d'algorithmes rapides

MESURES PARTIELLES

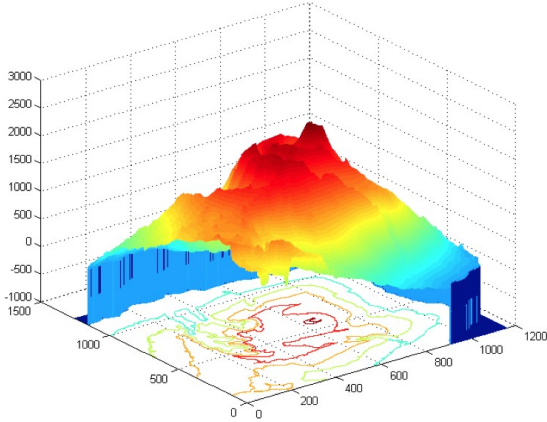
- Peu de stations GNSS (moins de 20 sur le Piton de la fournaise)
- Les satellites donnent aussi des mesures « partielles »
 - Les mesures sont entachées d'erreur
 - Certaines mesures peuvent être masquées
 - On ne mesure que dans la direction du satellite et pas en 3D



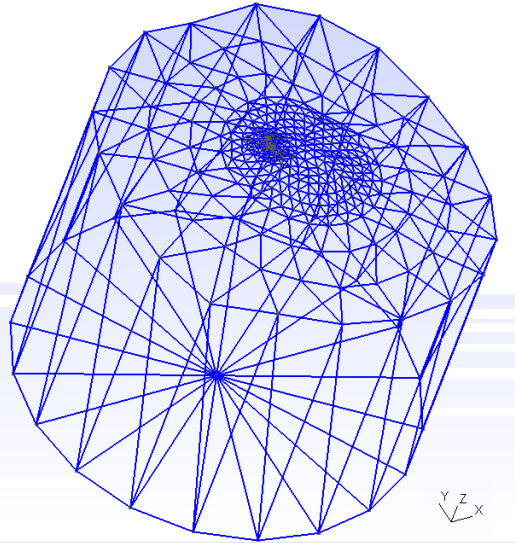
EXEMPLE : PITON DE LA FOURNAISE (LA REUNION)



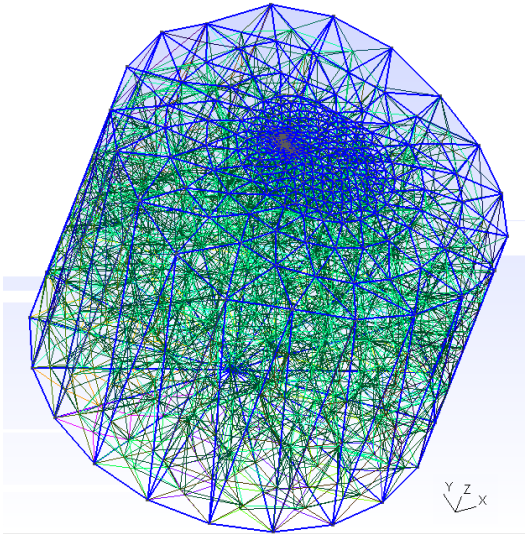
Modèle numérique de terrain(IGN)



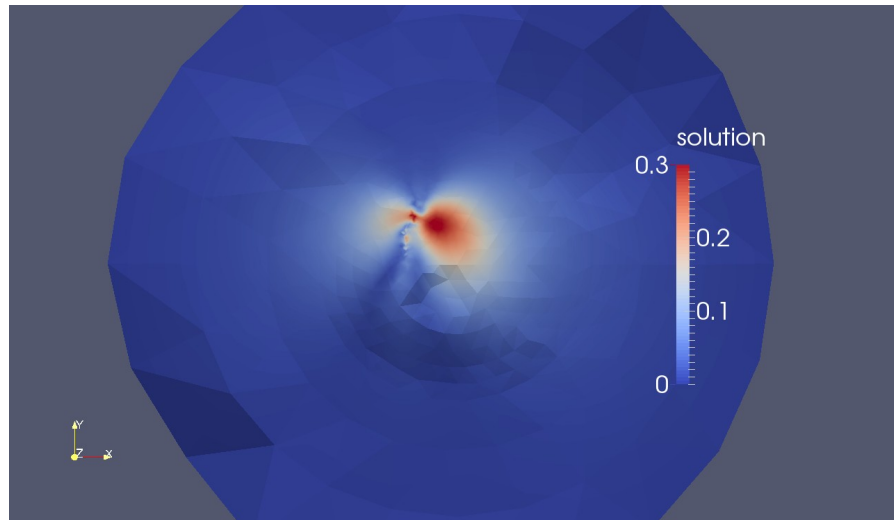
Logiciels «maison»



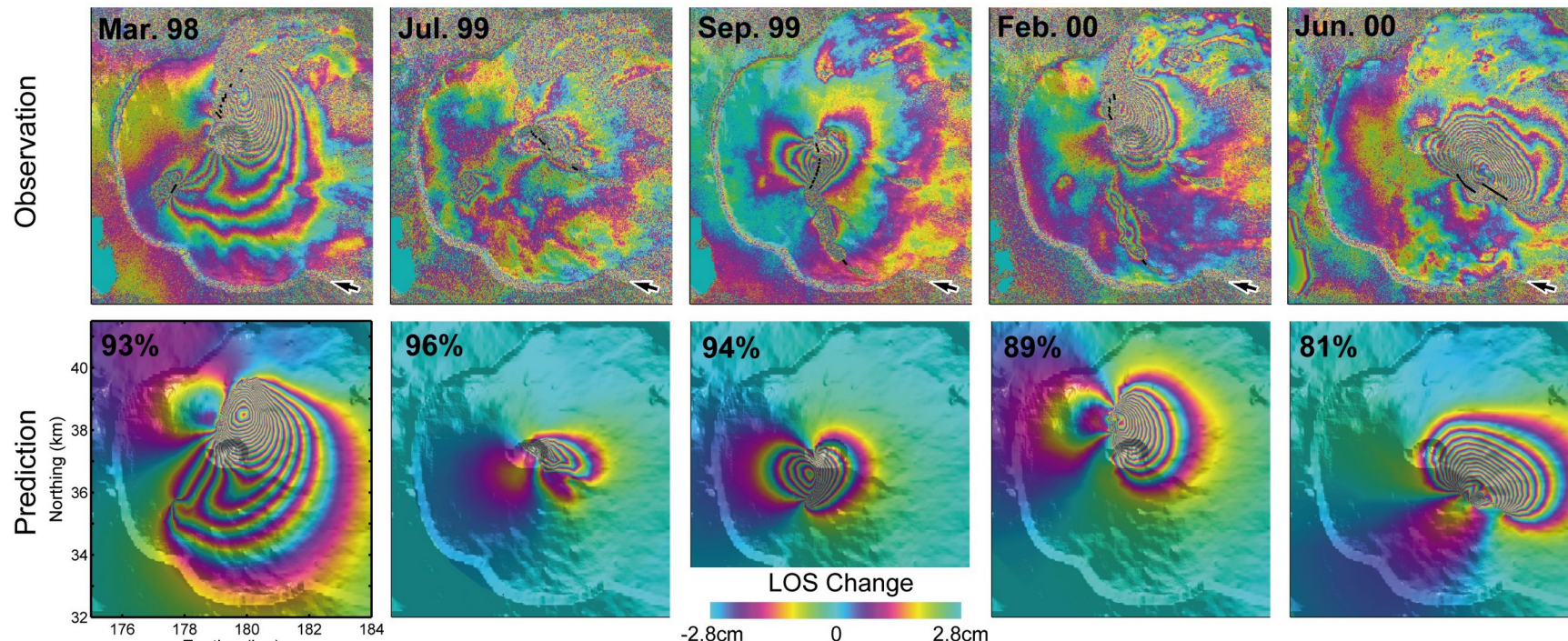
Logiciels «maison» et libres



RECONSTITUTION D'UNE ANCIENNE ERUPTION BIEN CONNUE



Déformation du sol calculée



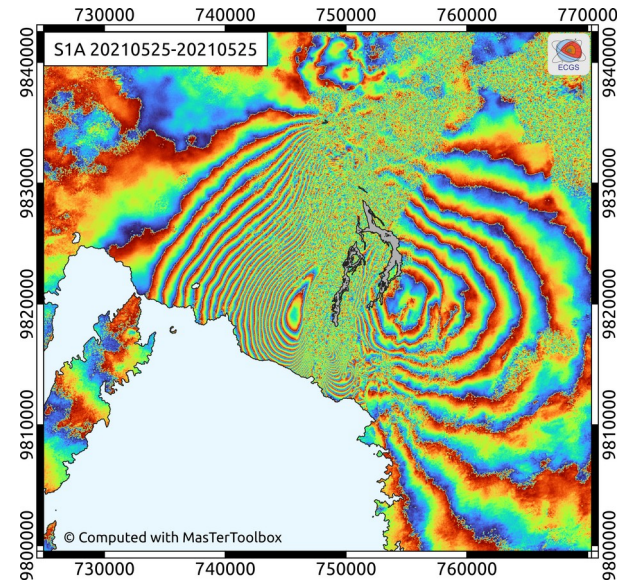
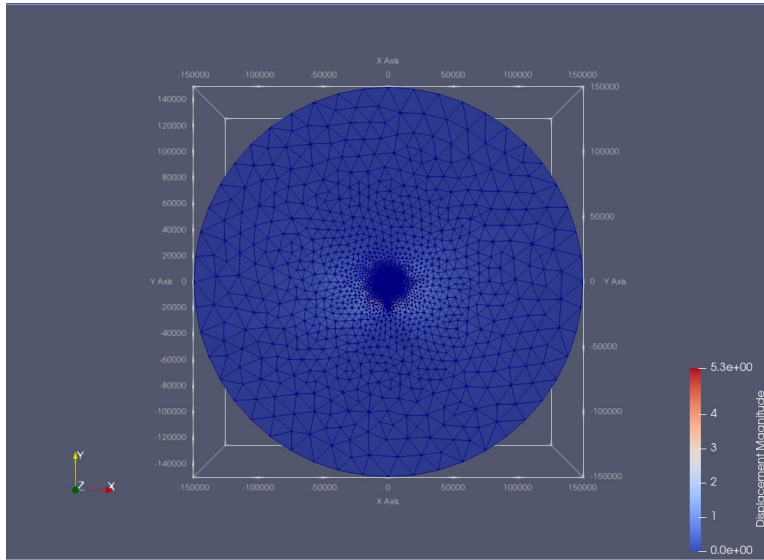
Eruption du Nyiragongo, 22 mai 2021



- Considérée comme ayant débuté en 2002 (250 morts à l'époque)
- Coulée de lave à 1km/h sur plus de 20km vers Goma
- Nombreux dégâts matériels
- Risque de santé par inhalation de gaz toxiques

Eruption du Nyiragongo, 22 mai 2021

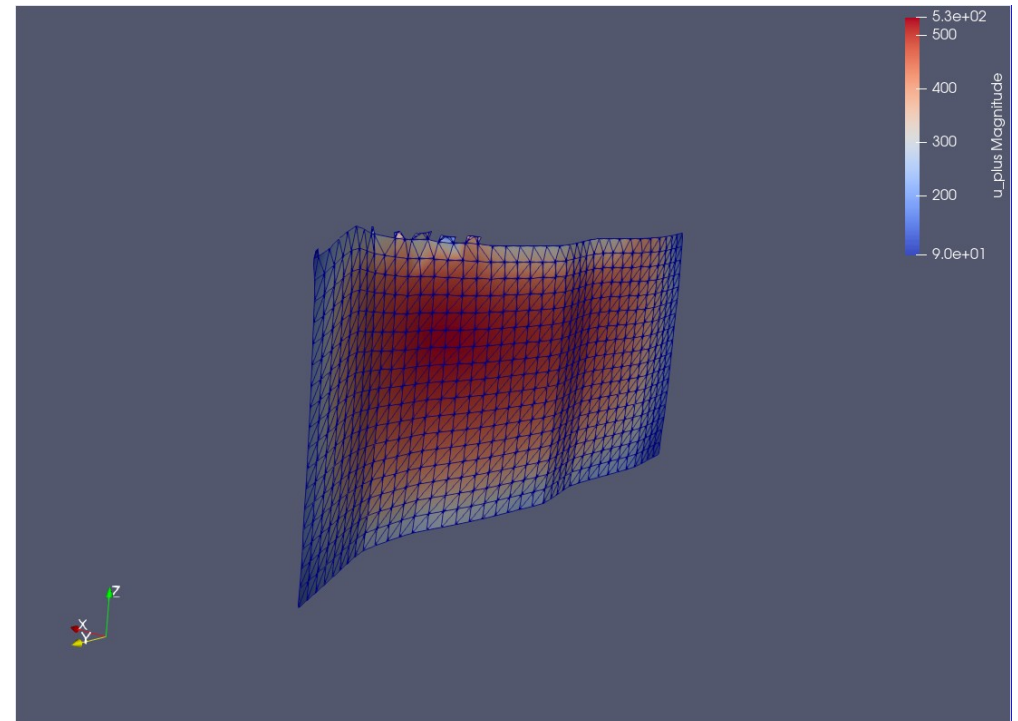
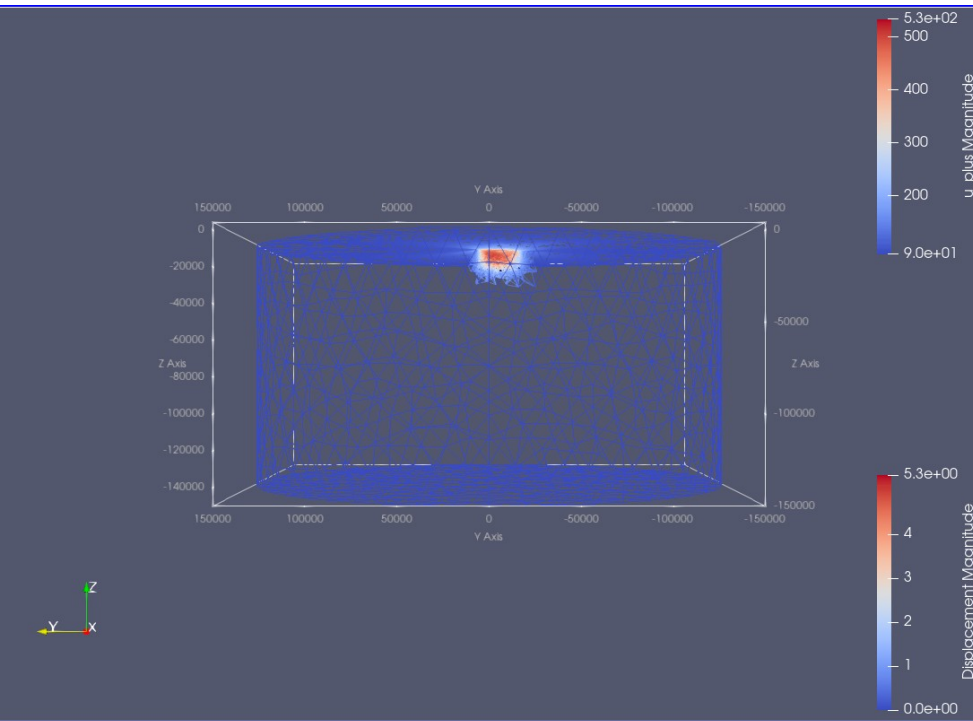
Topographie et mesures radar



- Domaine de calcul de 150 km de rayon et 150km de profondeur
- données INSAR satellitaires partielles (directions Terre-Satellite + masque)

Eruption du Nyiragongo, 22 mai 2021

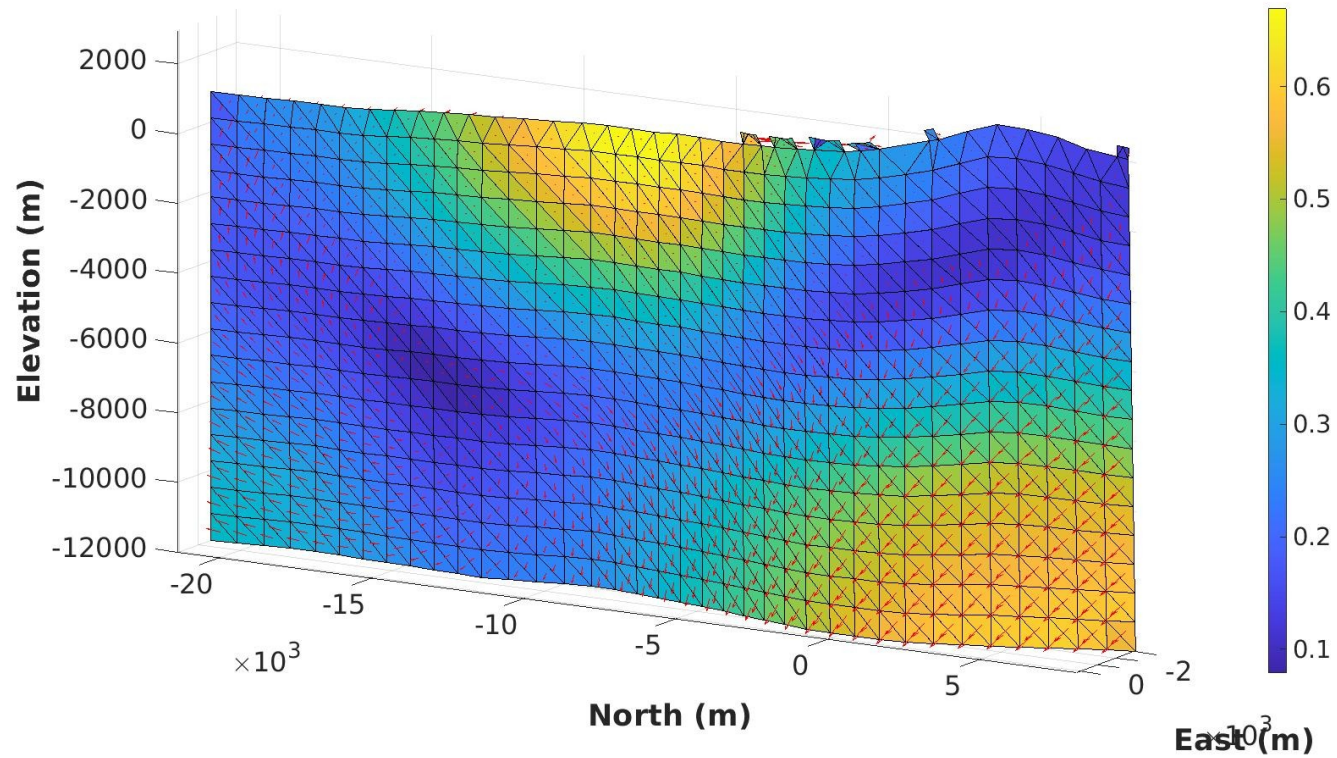
Détermination de la fracture



- Fracture atteignant le sol
- 12 km de profondeur

Eruption du Nyiragongo, 22 mai 2021

Efforts du magma sur la fracture



- Fracture atteignant le sol (coulée)
- 12 km de profondeur

Merci de votre attention

