

La loi des grands nombres ou de l'art de retrouver π avec des baguettes Et plus encore

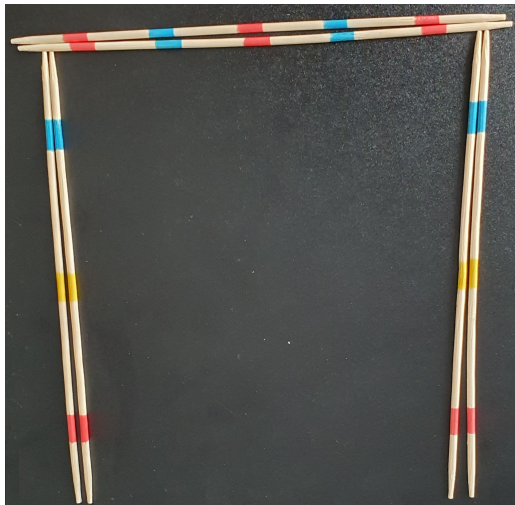
Julian Tugaut

Université Jean Monnet - Institut Camille Jordan

Vendredi 04 Juillet 2025

On pourrait faire ainsi...

On pourrait faire ainsi...



- 1 Aiguilles de Buffon
 - Expérience de Buffon
 - Probabilité d'intersection

- 2 Loi des Grands Nombres
 - Intuition
 - Théorème
 - Application aux aiguilles de Buffon

- 3 Au-delà de la loi des grands nombres
 - Théorème Central de la Limite
 - Grandes déviations

- 1 Aiguilles de Buffon
 - Expérience de Buffon
 - Probabilité d'intersection

- 2 Loi des Grands Nombres
 - Intuition
 - Théorème
 - Application aux aiguilles de Buffon

- 3 Au-delà de la loi des grands nombres
 - Théorème Central de la Limite
 - Grandes déviations

Description de l'expérience

Description de l'expérience

Lançons une baguette en l'air, au-dessus d'un parquet.

Description de l'expérience

Lançons une baguette en l'air, au-dessus d'un parquet.

Et répétons l'expérience environ 1000 fois.

Description de l'expérience

Lançons une baguette en l'air, au-dessus d'un parquet.

Et répétons l'expérience environ 1000 fois.

Expériences IID (Indépendantes et Identiquement Distribuées)

On se place dans les mêmes conditions (identiquement distribuées) mais on suppose que l'expérience est répétée indépendamment (indépendance) à chaque fois !

Description de l'expérience

Lançons une baguette en l'air, au-dessus d'un parquet.

Et répétons l'expérience environ 1000 fois.

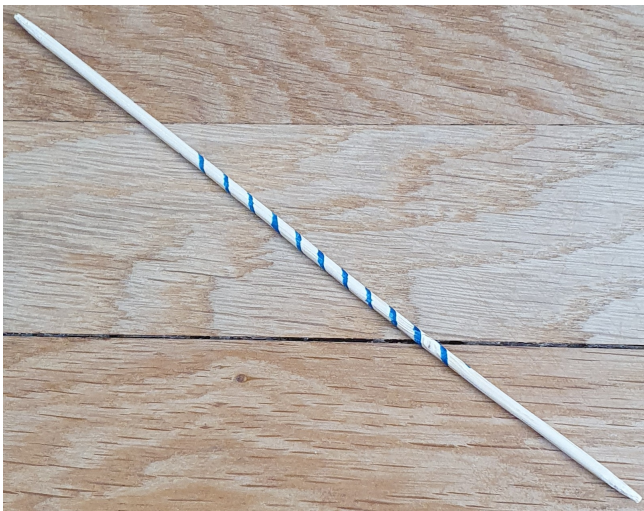
Combien de fois la baguette est-elle à cheval sur 2 planches ?

Expériences IID (Indépendantes et Identiquement Distribuées)

On se place dans les mêmes conditions (identiquement distribuées) mais on suppose que l'expérience est répétée indépendamment (indépendance) à chaque fois !

Illustration

Illustration



Expérience alternative

Expérience alternative

Si on lance mille fois la baguette et si l'expérience prend plus de 8 secondes, il faut avoir plus de deux heures devant soi...

Expérience alternative

Si on lance mille fois la baguette et si l'expérience prend plus de 8 secondes, il faut avoir plus de deux heures devant soi...

Alternativement, on lance un grand nombre de baguettes une fois.

Illustration (avec 41 baguettes de Mikado)

Illustration (avec 41 baguettes de Mikado)



Et l'indépendance ?

Et l'indépendance ?

Conserve-t-on l'hypothèse d'indépendance dans ce cas ?

Et l'indépendance ?

Conserve-t-on l'hypothèse d'indépendance dans ce cas ?

Il n'y a pas de raison que ladite hypothèse soit vérifiée.

Et l'indépendance ?

Conserve-t-on l'hypothèse d'indépendance dans ce cas ?

Il n'y a pas de raison que ladite hypothèse soit vérifiée.

Mais il n'y en avait pas plus de la supposer au début.

Et l'indépendance ?

Conserve-t-on l'hypothèse d'indépendance dans ce cas ?

Il n'y a pas de raison que ladite hypothèse soit vérifiée.

Mais il n'y en avait pas plus de la supposer au début.

Bien que cette hypothèse ne reflète pas intrinsèquement la réalité du monde,

Et l'indépendance ?

Conserve-t-on l'hypothèse d'indépendance dans ce cas ?

Il n'y a pas de raison que ladite hypothèse soit vérifiée.

Mais il n'y en avait pas plus de la supposer au début.

Bien que cette hypothèse ne reflète pas intrinsèquement la réalité du monde, elle est bien commode et on est souvent amené à la prendre.

Probabilité d'intersection - 1

Probabilité d'intersection - 1

Hypothèse cruciale

Il faut que la longueur de la baguette soit inférieure (ou égale) à la largeur des planches.

Probabilité d'intersection - 1

Hypothèse cruciale

Il faut que la longueur de la baguette soit inférieure (ou égale) à la largeur des planches.

Dans mon cas

Les baguettes de mikado font 18 centimètres de long et les planches font 5 centimètres de large...

Probabilité d'intersection - 1

Hypothèse cruciale

Il faut que la longueur de la baguette soit inférieure (ou égale) à la largeur des planches.

Dans mon cas

Les baguettes de mikado font 18 centimètres de long et les planches font 5 centimètres de large...

Solution

On regroupera les planches quatre par quatre. De fait, on pourra appliquer les calculs de l'expérience.

Probabilité d'intersection - 2

Probabilité d'intersection - 2

On note ℓ la largeur des planches du parquet. Ici, $\ell := 20\text{cm}$.

Probabilité d'intersection - 2

On note ℓ la largeur des planches du parquet. Ici, $\ell := 20cm$.

On note a la longueur des baguettes. Ici, $a := 18cm$.

Probabilité d'intersection - 2

On note ℓ la largeur des planches du parquet. Ici, $\ell := 20cm$.

On note a la longueur des baguettes. Ici, $a := 18cm$.

On pose r la distance du centre de la baguette à la rainure la plus proche.

Probabilité d'intersection - 2

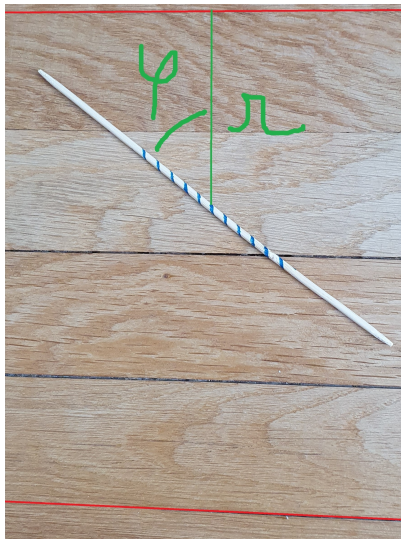
On note ℓ la largeur des planches du parquet. Ici, $\ell := 20cm$.

On note a la longueur des baguettes. Ici, $a := 18cm$.

On pose r la distance du centre de la baguette à la rainure la plus proche.

On note φ l'angle (géométrique) entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ formé par la baguette et les rainures.

Probabilité d'intersection - 3



Probabilité d'intersection - 4

Probabilité d'intersection - 4

r suit une loi uniforme sur $\left[0; \frac{\ell}{2}\right]$ et φ en suit une sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Probabilité d'intersection - 4

r suit une loi uniforme sur $\left[0; \frac{\ell}{2}\right]$ et φ en suit une sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans ce cas, il y a intersection si et seulement si $\frac{a}{2} \cos(\varphi) \geq r$.

Probabilité d'intersection - 4

r suit une loi uniforme sur $\left[0; \frac{\ell}{2}\right]$ et φ en suit une sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans ce cas, il y a intersection si et seulement si $\frac{a}{2} \cos(\varphi) \geq r$.

Et, cette probabilité est :

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} \frac{\ell}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{\frac{a}{2} \cos(\varphi)} dr \right) d\varphi = \frac{4}{\pi \ell} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2} \cos(\varphi) d\varphi = \frac{2a}{\pi \ell}.$$

Probabilité d'intersection - 4

r suit une loi uniforme sur $\left[0; \frac{\ell}{2}\right]$ et φ en suit une sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans ce cas, il y a intersection si et seulement si $\frac{a}{2} \cos(\varphi) \geq r$.

Et, cette probabilité est :

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} \frac{\ell}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{\frac{a}{2} \cos(\varphi)} dr \right) d\varphi = \frac{4}{\pi \ell} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2} \cos(\varphi) d\varphi = \frac{2a}{\pi \ell}.$$

Ici, la probabilité devient donc : $p = \frac{36}{20\pi} = \frac{9}{5\pi} \approx 0.573$.

Comment obtenir π ?

Comment obtenir π ?

On lance un grand nombre de baguettes de façon indépendante.

Comment obtenir π ?

On lance un grand nombre de baguettes de façon indépendante.

On compte la proportion de baguettes qui sont à cheval sur deux planches.

Comment obtenir π ?

On lance un grand nombre de baguettes de façon indépendante.

On compte la proportion de baguettes qui sont à cheval sur deux planches.

On obtient une proportion empirique p_e qui doit être environ $\frac{9}{5\pi}$.

Comment obtenir π ?

On lance un grand nombre de baguettes de façon indépendante.

On compte la proportion de baguettes qui sont à cheval sur deux planches.

On obtient une proportion empirique p_e qui doit être environ $\frac{9}{5\pi}$.

On estime ensuite π par $\frac{9}{5p_e}$.

Et si $\ell < a$?

Et si $\ell < a$?

Dans ce cas, la probabilité qu'il y ait au moins une intersection entre une baguette donnée et une latte est égale à

$$\tilde{p} = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{\ell}{a}\right) + \frac{4a}{\pi\ell} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\ell}{a}\right)^2}\right).$$

Et si $\ell < a$?

Dans ce cas, la probabilité qu'il y ait au moins une intersection entre une baguette donnée et une latte est égale à

$$\tilde{p} = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{\ell}{a}\right) + \frac{4a}{\pi\ell} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\ell}{a}\right)^2}\right).$$

Partant du principe qu'on ne connaît pas les valeurs de la fonction arccosinus (vu qu'on ne connaît déjà pas la valeur de $\pi := 2 \arccos(0)$), on ne peut pas retrouver π facilement.

- 1 Aiguilles de Buffon
 - Expérience de Buffon
 - Probabilité d'intersection
- 2 Loi des Grands Nombres
 - Intuition
 - Théorème
 - Application aux aiguilles de Buffon
- 3 Au-delà de la loi des grands nombres
 - Théorème Central de la Limite
 - Grandes déviations

Intuition de la loi des grands nombres

Jeu du pile ou face

Quand je lance une pièce équilibrée, je gagne un euro si elle tombe sur face et je ne gagne rien si elle tombe sur pile.

Si je joue dix mille fois, combien aurai-je gagné en moyenne par partie ?

Intuition de la loi des grands nombres

Jeu du pile ou face

Quand je lance une pièce équilibrée, je gagne un euro si elle tombe sur face et je ne gagne rien si elle tombe sur pile.

Si je joue dix mille fois, combien aurai-je gagné en moyenne par partie ?

Selon toute logique, je gagne environ cinquante centimes par partie.

Énoncé de la loi des grands nombres

Soit une expérience aléatoire e qui n'a que deux résultats possibles : Oui (1) ou Non (0).

On admet que la probabilité que l'expérience donne 1 est égale à p .

On répète l'expérience indépendamment à n reprises. On note K_n le nombre d'occurrences de 1 et on pose $p_n := \frac{K_n}{n}$.

Alors, la valeur (aléatoire) p_n converge vers la valeur p pour n grand.

En particulier

La probabilité ξ_n que la valeur aléatoire p_n soit dans l'intervalle $[p - \delta/2; p + \delta/2]$ centré autour de p et de longueur arbitrairement petite δ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Approximation de π via les aiguilles de Buffon

Approximation de π via les aiguilles de Buffon

C'est la loi des grands nombres énoncée précédemment qui valide l'expérience, sous l'hypothèse d'indépendance et si de plus les conditions sont similaires.

- 1 Aiguilles de Buffon
 - Expérience de Buffon
 - Probabilité d'intersection

- 2 Loi des Grands Nombres
 - Intuition
 - Théorème
 - Application aux aiguilles de Buffon

- 3 Au-delà de la loi des grands nombres
 - Théorème Central de la Limite
 - Grandes déviations

Calcul approché

Calcul approché

On veut sommer les prix de 1200 actions avec un logiciel de calcul. Toutefois, la précision n'étant pas très bonne, on arrondit chacun des prix à l'euro le plus près.

Calcul approché

On veut sommer les prix de 1200 actions avec un logiciel de calcul. Toutefois, la précision n'étant pas très bonne, on arrondit chacun des prix à l'euro le plus près.

Le logiciel somme alors les 1200 nombres. Et on se demande si l'écart entre la somme réelle et la somme arrondie n'est pas trop élevé...

Calcul approché

On veut sommer les prix de 1200 actions avec un logiciel de calcul. Toutefois, la précision n'étant pas très bonne, on arrondit chacun des prix à l'euro le plus près.

Le logiciel somme alors les 1200 nombres. Et on se demande si l'écart entre la somme réelle et la somme arrondie n'est pas trop élevé...

Plus précisément, quelle est la probabilité que l'on fasse une erreur de plus de vingt euros ?

Calcul approché

On veut sommer les prix de 1200 actions avec un logiciel de calcul. Toutefois, la précision n'étant pas très bonne, on arrondit chacun des prix à l'euro le plus près.

Le logiciel somme alors les 1200 nombres. Et on se demande si l'écart entre la somme réelle et la somme arrondie n'est pas trop élevé...

Plus précisément, quelle est la probabilité que l'on fasse une erreur de plus de vingt euros ?

Réponse : environ 4.56%.

Énoncé (restreint) du Théorème Central de la Limite

TCL

Soit une expérience aléatoire e qui admet un continuum de résultats possibles dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

On admet que la probabilité sous-jacente est uniforme.

On répète l'expérience indépendamment à n reprises. On note S_n la somme des n résultats obtenus et on pose $Y_n := \sqrt{\frac{12}{n}} S_n$.

Alors, la valeur (aléatoire) Y_n tend à se répartir comme une gaussienne centrée réduite quand n devient grand.

En pratique

Prendre n supérieur à 8 suffit largement avec nos hypothèses.

Cas général

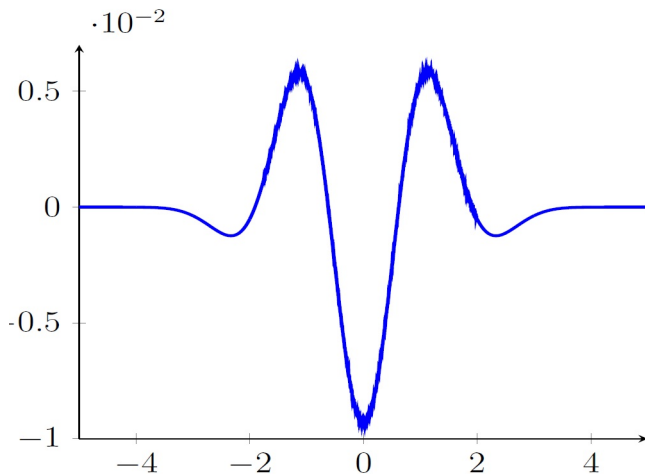
Avec des lois qui ne sont pas uniformes, la répartition devient normale pour peu que n est supérieur à 30.

Illustration pour $n = 8$

Voici la différence entre la répartition de Y_8 et la loi normale :

Illustration pour $n = 8$

Voici la différence entre la répartition de Y_8 et la loi normale :



Lois de Bernoulli et Grandes déviations

Ici, on va beaucoup plus loin que la loi des grands nombres énoncée précédemment.

On se donne une expérience à deux résultats : 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1 - p$.

On peut montrer que la transformée de Cramèr (c'est-à-dire la transformée de Legendre de la log-Laplace de la loi) de la loi de Bernoulli est

$$\Lambda^*(x) := x \log \left(\frac{x}{p} \right) + (1 - x) \log \left(\frac{1 - x}{1 - p} \right) .$$

Or, il est facile, en utilisant l'inégalité de Markov, d'aboutir à

$$\mathbb{P} \{ |p_n - p| > \delta \} \leq \exp [-n\Lambda^*(p + \delta)] + \exp [-n\Lambda^*(p - \delta)] .$$

Applications aux aiguilles de Buffon

Ici, $p = \frac{9}{5\pi} \approx 0.573$. De fait, en lançant 1000 baguettes, l'écart entre p_{1000} et p est d'au plus δ avec une probabilité d'au moins

$$1 - e^{-820 \times \Lambda^*(p+\delta)} - e^{-820 \times \Lambda^*(p-\delta)}.$$

Prenons $\delta := 0.05$. Alors, $\Lambda^*(p + \delta) \approx 0.00517$ et $\Lambda^*(p - \delta) = 0.00507$. On trouve donc un intervalle de confiance de largeur 0.1 avec un seuil de risque inférieur à 1.5%.

MERCI POUR VOTRE
ATTENTION